

LU 8.11 An Experiment on Measuring Volumes

LU 8.11 કદ માપવા પર એક પ્રયોગ

Overview

પ્રસ્તાવના

The story of the crow and the pitcher (a kind of pot for holding water) from the collection of Aesop's Fables is very popular among children. Using this simple story, we can explore the concept of volume of solids and liquids with the students. In this Learning Unit, students learn how to estimate the volumes of different bodies by immersing them in water. We also introduce the idea of the packing of solids, i.e., when you try to pack together (or put together) many solid objects, there may be some gaps in between. Due to this property of solids, the crow may not be successful in raising the level of water beyond a certain limit.

'ઈસપની દંતકથાઓના' સંગ્રહમાંથી, 'તરસ્યા કાગડા'ની વાર્તા બાળકોમાં ખૂબ પ્રખ્યાત છે. આ સરળ વાર્તાનો ઉપયોગ કરીને, આપણે વિદ્યાર્થીઓ સાથે ઘન અને પ્રવાહીના કદ (વોલ્યુમ) ના વિચારનું અન્વેષણ કરી શકીએ. આ શૈક્ષણિક એકમમાં, વિદ્યાર્થીઓ વિવિધ વસ્તુઓને પાણીમાં ડૂબાડી, તેમના કદનું અનુમાન લગાવવાનું શીખી શકે છે. અમે ઘન પદાર્થોની ગોઠવણ (પેકિંગ) નો વિચાર પણ રજૂ કરીએ છીએ, એટલે કે, જ્યારે તમે ઘણા ઘન પદાર્થો એક સાથે ગોઠવવા નો પ્રયાસ કરો છો, ત્યારે તેમની વચ્ચે કેટલીક ખાલી જગ્યા રહી શકે છે. ઘન પદાર્થોના આ ગુણધર્મના લીધે, કાગડો પાણીનું સ્તર, એક ચોક્કસ મર્યાદાથી આગળ વધારવામાં સફળ ન થઈ શક્યો.

Minimum time: Three sessions of 40 mins each.

ન્યૂનતમ સમય: 40 મિનિટના, 3 સત્રો

Type of Learning Unit: Classroom activity

શૈક્ષણિક એકમનો પ્રકાર: વર્ગખંડ પ્રવૃત્તિ

Unit-specific objectives

એકમના વિશિષ્ટ હેતુઓ

- To make a marked transparent cylinder and use it to measure the volume of liquids.
અંકિત પારદર્શક નળાકાર (સિલિન્ડર) બનાવવું અને તેનો ઉપયોગ કરી પ્રવાહીનું કદ માપવું.
- To use the volume of fluid displaced by submerged bodies to measure the volume of solids that do not dissolve in water.
પાણીમાં અદ્રાવ્ય ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ માપવા માટે, ડૂબાડેલી વસ્તુ દ્વારા વિસ્થાપિત પ્રવાહીના કદનો ઉપયોગ કરવો.
- To understand the importance of the least count of a measuring instrument, and its use in finding the accuracy of volume measurement.
માપવાના સાધનના લઘુત્તમ માપ (લીસ્ટ કાઉન્ટ) નું મહત્વ અને કદ માપવાની ચોકસાઈ શોધવા માટે તેનો ઉપયોગ સમજવો.
- To develop an intuitive understanding of the concept of packing fraction.
'પેકિંગ ફ્રેક્શન'ના ખ્યાલની સાહજિક સમજ વિકસાવવી.

Links to curriculum

અભ્યાસક્રમ સાથેનું સંકલન

1. NCERT Class 7 Science Textbook: Chapter 9, Soil (Feb 2006) (relates to the concept of water that can be held in pore spaces of soil/rock pieces)

એનસીઈઆરટી (NCERT) વર્ગ 7 વિજ્ઞાનની પાઠ્યપુસ્તક: પ્રકરણ 9, માટી (ફેબ્રુઆરી 2006) (પાણી, જે માટી/ખડકના ટુકડાઓના છિદ્રોમાં સમાય છે, તેની સમજ સાથે સંબંધિત છે.)

2. NCERT Class 8 Mathematics Textbook: Chapter 9, Mensuration (Nov 2022) (the formulas from this chapter are not directly required here, but this unit helps students internalise some of the ideas of volume measurements)

એનસીઈઆરટી (NCERT) વર્ગ 8 ગણિતની પાઠ્યપુસ્તક: પ્રકરણ 9, માપન (નવેમ્બર 2022) (આ પ્રકરણના સૂત્રો અહીં જરૂરી નથી, પરંતુ આ એકમ વિદ્યાર્થીઓને કદ માપનના કેટલાક વિચારોને આત્મસાત કરવામાં મદદ કરે છે.)

Learning from "The crow and the pitcher" story

‘તરસ્યા કાગડા’ની વાર્તાથી શીખવું!

Do you remember the childhood fable of the crow and the pitcher? (See figure 1) In this unit, we will imitate the crow in the story and use the concept that ‘a body submerged in water displaces an amount of water equivalent to its volume’, to carry out some measurements. The last task in this unit is closely related to the tale — and you may reach a surprising conclusion at the end of it!

શું તમને બાળપણમાં સાંભળેલી ‘તરસ્યા કાગડા’ની વાર્તા યાદ છે?(આકૃતિ 1 જુઓ) આ શૈક્ષણિક એકમમાં, આપણે વાર્તાના કાગડાનું અનુકરણ કરીશું. "જ્યારે કોઈપણ વસ્તુ પાણીમાં ડૂબી જાય છે ત્યારે તે પોતાના કદ સમાન માત્રામાં પાણીને વિસ્થાપિત કરે છે", આ સિદ્ધાન્તનો ઉપયોગ કરી આપણે કેટલાક માપ લઈશું. આ એકમનું છેલ્લું કાર્ય ‘તરસ્યા કાગડા’ની વાર્તાથી નિકટની સંબંધિત છે- અને તેના અંતમાં તમે એક આશ્ચર્યજનક નિષ્કર્ષ પર પહોંચી શકો છો.



Figure 1 : The Crow and the Pitcher

આકૃતિ 1 : ‘તરસ્યા કાગડા’ની વાર્તા

From The Aesop for Children, by Aesop, illustrated by Milo Winter, Project Gutenberg etext 1994

Materials

સામગ્રી

- A narrow transparent cylinder (or a transparent 500 mL water bottle with the top cut off; the cylinder need not have uniform diameter across its length)
એક સાંકડું પારદર્શક નળાકાર (સિલિન્ડર) (અથવા 500 મિલી પાણીની બોટલ લો અને તેનો ઉપરનો ભાગ કાપી નાખો).
- Glass marbles (~40) of similar size
સમાન કદની કાચની લખોટીઓ (માર્બલ્સ) (~40)
- Small irregular stone which can fit into the cylinder comfortably (see note in task 4)
એક નાનો અનિયમિત આકારનો પથ્થર જે નળાકારમાં આરામથી સમાય શકે છે (કાર્ય 4 માં નોંધ જુઓ)
- Ruler
માપપટ્ટી
- Marker pen (fine tipped)
માર્કર પેન (જે પાતળી નિશાની દોરી શકે)
- Straight edge (like another ruler or edge of a notebook)
સીધી ધાર (અન્ય માપપટ્ટી અથવા પુસ્તકની ધાર જેવું)
- Beaker (with graduated volume markings)
બીકર (કદના અંકિત ચિહ્નો સાથે)
- A tray may be kept to collect water spills
ઢોળાયેલું પાણી એકત્રિત કરવા માટે એક પાત્ર રાખી શકાય

Are you familiar with these ideas?

શું તમે આ વિચારોથી પરિચિત છો?

- Volume
કદ (વોલ્યુમ)

Students should be familiar with the concept of volume in general and also the formula for volume of a sphere.

વિદ્યાર્થીઓમાં વસ્તુઓના કદની સમજ હોવી જોઈએ અને તેઓ ગોળાના ઘનફળના સૂત્રથી પરિચિત હોવા જોઈએ.

નોંધ: જ્યારે વોલ્યુમને માપવામાં આવે છે, ત્યારે તેને કદ કહેવાય છે, અને જ્યારે તે ગણતરી કરીને કઢવામાં આવે છે, દાખલા તરીકે સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને મળતા વોલ્યુમ ને ઘનફળ કહેવાય છે.

- Displacement of fluids by solid objects
ઘન પદાર્થો દ્વારા પ્રવાહીનું વિસ્થાપન

Students should be aware that when a non-porous solid body is immersed in a fluid, it displaces fluid equal to its own volume. Familiarity with the Archimedes' principle of buoyancy is **not** necessary for this task.

વિદ્યાર્થીઓને ખબર હોવી જોઈએ કે જ્યારે બિન-છિદ્રાળુ ઘન વસ્તુ પ્રવાહીમાં ડૂબી જાય છે, ત્યારે તે પોતાના કદ જેટલા પ્રવાહીને

વિસ્થાપિત કરે છે. આ કાર્ય માટે આર્કિમિડીઝ સિદ્ધાંતથી પરિચિતતા હોવી જરૂરી નથી.

- Average/ Mean
સરેરાશ (મધ્યક)

Students should be familiar with the concept of the average of several quantities.
વિદ્યાર્થીઓ વિવિધ માત્રાઓના સરેરાશથી પરિચિત હોવા જોઈએ.

Task 1: Creating your own volume measuring instrument (a graduated cylinder)

કાર્ય 1: તમારું પોતાનું કદ માપન સાધન બનાવવું (અંકિત નળાકાર)

- Use a beaker to carefully measure 50 mL water and transfer it to the transparent cylinder. Mark the height of the water column on the cylinder using a marker pen.
બીકરનો ઉપયોગ કરી કાળજીપૂર્વક 50 મિલી પાણી માપો અને તેને પારદર્શક નળાકાર(સિલિન્ડર) માં નાખો. માર્કર પેન નો ઉપયોગ કરી નળાકાર પર પાણીનું સ્તર ચિહ્નિત કરો.
- Repeat this till the cylinder is almost full, marking successive heights at the steps of 50 mL.
નળાકાર લગભગ ભરાઈ ન જાય ત્યાં સુધી આનું પુનરાવર્તન કરો, દરેક 50 મિલી એ નળાકારને ચિહ્નિત કરો.
- Label the markings with appropriate multiples of 50 mL. (50, 100, 150,...)
50 મિલીના યોગ્ય ગુણાંક સાથે નિશાનોને ચિહ્નિત કરો. (50,100, 150, ...)

Now you have a graduated cylinder which measures volume. You will notice that we can use this cylinder to measure volume only in multiples of 50 mL. Hence 50 mL is the least count of this graduated cylinder. If the water level is between two markings, we take the reading as the mark that is closest to the water level. હવે, તમારી પાસે એક અંકિત નળાકાર છે, જે કદ માપી શકે છે. તમે જોશો કે આપણે આ નળાકારનો ઉપયોગ ફક્ત 50 મિલીના ગુણાંકમાં કદ માપવા માટે કરી શકીએ છીએ. તેથી 50 મિલી એ આ અંકિત નળાકારનું 'લઘુત્તમ માપ' (લીસ્ટ કાઉન્ટ) છે. જો પાણીનું સ્તર બે ચિહ્નોના વચ્ચે હોય, તો આપણે પાણીના સ્તરની વધુ નજીકના ચિહ્નને ધ્યાનમાં લઈ શકીએ છીએ.

The maximum volume your graduated cylinder can measure is _____ (highest marking on the cylinder).

તમારા અંકિત નળાકારથી માપી શકાતું મહત્તમ કદ (નળાકાર પર સૌથી વધુ ચિહ્નિત ગુણાંક) _____ છે.

- Here it would be useful to discuss the concept of least count with the students. In this context, the least count would be 50 mL.
અહીં વિદ્યાર્થીઓ સાથે લઘુત્તમ માપ ના ખ્યાલ વિશે ચર્ચા કરવી યોગ્ય રહેશે. આ સંદર્ભમાં, લઘુત્તમ માપ 50 મિલી હશે.
- In task 4, we will see how to increase the accuracy of this graduated cylinder beyond the current least count.
કાર્ય 4 માં, આપણે જોઈશું કે આ અંકિત નળાકારની ચોકસાઈ હાલના લઘુત્તમ માપ કરતા કેવી રીતે વધારવી.
- The graduated cylinders prepared by the students in this task can also be reused for other experimental purposes.
આ કાર્યમાં વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા તૈયાર કરેલા અંકિત નળાકારનો ઉપયોગ અન્ય પ્રાયોગિક હેતુઓ માટે પણ ફરીથી કરી શકાય છે.
- You may make suitable modifications to the instructions above. For example, if there is a beaker which measures 25 mL instead of 50 mL, then the transparent cylinder could have markings for every 25 mL. However, reducing this least count of the cylinder should be avoided as it may increase error in

measurements because of non-uniformity in shape of the bottle and errors in making marks. Lower least count of this cylinder may also prompt students to take fewer number of marbles, which will lead to measuring volume change for lesser number of marbles increasing the relative error in volume per marble.

તમે ઉપરની સૂચનાઓમાં યોગ્ય ફેરફાર કરી શકો છો. ઉદાહરણ તરીકે, જો તમારી પાસે કોઈ એવું બીકર હોય જે 50 મિલીને બદલે 25 મિલી માપે છે, તો પછી પારદર્શક નળાકારમાં દર 25 મિલી માટે ચિહ્નો હોઈ શકે છે. તેમ છતાં, નળાકારનું લઘુત્તમ માપ ઘટાડવાનું ટાળવું જોઈએ, કારણ કે તે બોટલના આકારની અસમાનતા અને ચિહ્નો બનાવવામાં થતી ભૂલો ના લીધે માપનમાં ત્રુટિ વધી શકે છે. લઘુત્તમ માપ ઘટતાં વિદ્યાર્થીઓ ઓછી લખોટીઓનો ઉપયોગ કરવા પ્રેરાશે અને તેના કારણે પાણીના સ્તરનો તફાવત ઘટશે તથા સરેરાશ ઘનફળની ગણતરીની ત્રુટિઓ વધશે.

- Some labs may have a graduated beaker, or a graduated transparent cylinder, which is already marked. If the beaker or cylinder is large enough it could be used directly by one of the student groups. But do encourage the students to also prepare their own measuring cylinder. The results obtained with the marked cylinder and the beaker could then be compared. Before beginning, ask the students to observe the graduated beaker carefully and find its least count.

કેટલીક પ્રયોગશાળાઓમાં અંકિત બીકર અથવા અંકિત પારદર્શક નળાકાર હોઈ શકે છે, જે પહેલેથી જ ચિહ્નિત છે. જો તે બીકર અથવા નળાકાર પૂરતું મોટું હોય તો તેનો ઉપયોગ વિદ્યાર્થીઓના જૂથોમાંથી કોઈ એક જૂથ દ્વારા કરી શકાય છે. પરંતુ વિદ્યાર્થીઓને પોતાનું માપન નળાકાર તૈયાર કરવા માટે પ્રોત્સાહિત કરો, અને તેના પરિણામ ની તુલના બીકર સાથે મેળવેલા પરિણામ સાથે કરી શકાય છે. શરૂઆત કરતા પહેલા, વિદ્યાર્થીઓને અંકિત બીકરનું કાળજીપૂર્વક નિરીક્ષણ કરવા અને તેનું લઘુત્તમ માપ શોધવા માટે કહો.

Task 2: Measuring the average volume of marbles

કાર્ય 2: લખોટીઓનું સરેરાશ કદ માપવું

- Take the empty graduated cylinder and fill it up to the 200 mL mark.

ખાલી અંકિત નળાકાર લો અને તેમાં 200 મિલી ચિહ્ન સુધી પાણી ભરો.

- Drop the marbles in the cylinder, one by one while counting them, until the water level rises up to the next mark. Ensure that **all** the marbles are **fully** submerged in water. That is, the level of the water should be above all the marbles. The water level rises because each marble displaces an amount of water equal to its own volume.

નળાકારમાં એક પછી એક, ગણતરી કરતા, લખોટીઓ નાખો. આ પ્રક્રિયા ત્યાં સુધી કરો, જ્યાં સુધી પાણીનું સ્તર આગલા ચિહ્ન સુધી ન વધે. ખાતરી કરો કે **બધી** લખોટીઓ **સંપૂર્ણપણે** પાણીમાં ડૂબી ગયી છે. એટલે કે, પાણીનું સ્તર બધી લખોટીઓથી ઉપર હોવું જોઈએ. પાણીનું સ્તર વધે છે કારણ કે દરેક લખોટી પોતાના કદ જેટલા પાણીને વિસ્થાપિત કરે છે.

Volume of water before adding marbles _____

લખોટીઓ ઉમેરતા પહેલા પાણીનું કદ - _____

Volume of water after adding marbles _____

લખોટીઓ ઉમેર્યા પછી પાણીનું કદ - _____

Number of marbles required to raise the water level to the next mark _____

Thus, _____ marbles displace _____ volume of water.

આગળના ચિન્હ સુધી પાણીના સ્તરને વધારવા માટે જરૂરી લખોટીઓની સંખ્યા - _____

આમ, _____ લખોટીઓ પાણીના - _____ કદ ને વિસ્થાપિત કરે છે.

iii. Use this result to estimate the average volume of one marble, obtained experimentally. (V_{exp})

Average volume of one marble - _____

એક લખોટીનું અંદાજિત કદ માપવા માટે આ પરિણામનો ઉપયોગ કરો. (V_{exp})

એક લખોટીનું સરેરાશ કદ - _____

- It is possible that the students may not get the water level exactly up to a mark on the transparent cylinder. If the water level is below a certain mark, for say 20 marbles and goes above this mark for 21 marbles, then in such case, the number of marbles making up the difference in volume may be taken as 20 or 21 depending on if the 21st marble is submerged more or less than half and closeness of water level to the mark.

શક્ય છે કે વિદ્યાર્થીઓ પારદર્શક નળાકાર પરના ચિન્હ સુધી પાણીનું સ્તર બરાબર ન મેળવી શકે. દાખલા તરીકે જો પાણીનું સ્તર 20 લખોટીઓ માટે કોઈ ચિન્હથી નીચે હોય, અને 21 લખોટીઓ માટે તે ચિન્હથી ઉપર જતું રહે, તો પછી આવા કિસ્સામાં, 21 મી લખોટી પાણીમાં અડધાથી વધુ કે ઓછી ડૂબી રહી છે, અને ચિન્હથી પાણીના સ્તરની નિકટતા ના આધારે કદમાં તફાવત બનાવતા લખોટીઓની સંખ્યા 20 અથવા 21 લેવામાં આવી શકે છે.

- Moreover, the topmost marbles must be submerged while measuring volume. If there are air spaces between the top marbles, some marbles may be removed till such spaces are no more observed. Alternatively, the task may be repeated with larger starting volume of water.

કદ માપતી વખતે, સૌથી ઉપરની લખોટીઓ પાણીમાં ડૂબેલી હોવી જોઈએ. જો ઉપરની લખોટીઓ વચ્ચે ખાલી જગ્યાઓ હોય, તો આવી જગ્યાઓ ન રહે ત્યાં સુધી લખોટીઓ કાઢી શકાય. અથવાતો શરૂઆત થી જ વધારે પાણી લઈ આ કાર્ય પહેલાથી શરૂ કરી શકાય.

- The students may be given a hint to first obtain the volume for “n” marbles in this task and then the average volume of one marble. Note that all the marbles are nearly equal in volume, but not exactly equal. This is why it makes sense to talk of an average volume and take it as an estimate of the volume of one marble.

વિદ્યાર્થીઓને આ કાર્યમાં “n” લખોટીઓનું કદ મેળવવા માટે સંકેત આપી શકાય છે, અને પછી એક લખોટીનું સરેરાશ કદ શોધી શકાય છે. નોંધ લો કે બધી લખોટીઓનું કદ લગભગ સમાન છે, પરંતુ એક સરખું નથી. આથી જ એક લખોટીના કદ માટે સરેરાશ કદ લેવાનું વધુ અર્થપૂર્ણ છે.

- When we performed this task, the result we obtained for the set of marbles that we had was about 50 mL for 25 marbles, which meant that the average volume of one marble was about 2 mL.

જ્યારે અમે આ કાર્ય કર્યું, ત્યારે લખોટીઓના સમૂહ માટે અમે મેળવેલું પરિણામ 25 લખોટીઓ માટે આશરે 50 મિલી હતું, જેનો અર્થ એ કે એક લખોટીનું સરેરાશ કદ લગભગ 2 મિલી હતું.

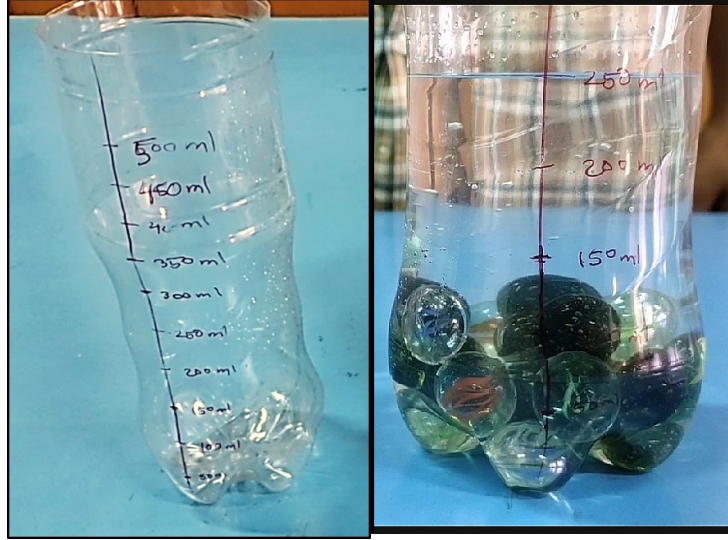


Figure T1 - (Left) A measuring cylinder and (right) A measuring cylinder with water and marbles

આકૃતિ T1 - (ડાબે) એક માપન નળાકાર અને (જમણે) પાણી અને લખોટીઓ સાથેનું માપન નળાકાર

Task 3: Comparing the volume of a marble estimated by two different methods

કાર્ય 3: બે અલગ અલગ પદ્ધતિઓ દ્વારા લખોટીના અંદાજિત ઘનફળની તુલના

- i. Keep ten marbles in a straight line touching each other. (You can create a long narrow channel by placing a straight edge and a ruler parallel to one another with a gap in between, with the marbles lined up in the gap.)

એક સીધી રેખામાં એકપછી એક 10 લખોટીઓ, એકબીજાને અડીને ગોઠવો. (એક સીધી ધાર અને માપપટ્ટીને એક બીજા સાથે સમાંતર મૂકીને, તમે લાંબી, સાંકડી જગ્યા બનાવો અને તેમની વચ્ચેના અંતરાલમાં લખોટીઓ ગોઠવો.)

- ii. Measure the end-to-end length of the line of marbles.

End-to-end length of ten marbles _____

લખોટીઓના એક છેડાથી બીજા છેડા સુધીની લંબાઈ માપો.

લખોટીઓની લંબાઈ - _____

- iii. Use this measurement to estimate the average radius of the marbles.

Average radius of one marble _____

આ માપનો ઉપયોગ કરી, એક લખોટીની સરેરાશ ત્રિજ્યાનો અંદાજ મેળવો.

એક લખોટીની સરેરાશ ત્રિજ્યા - _____

- iv. Calculate the volume of a marble (sphere) ($V_{calc} = \frac{4}{3}\pi r^3$) using the radius you have obtained.

Volume of one marble (obtained using the formula) _____

તમે પ્રાપ્ત કરેલ ત્રિજ્યાનો ઉપયોગ કરીને એક લખોટીના ઘનફળની ગણતરી કરો ($V_{calc} = \frac{4}{3}\pi r^3$).

એક લખોટીનું ઘનફળ - _____

- v. You may notice that the volumes obtained by these two methods differ slightly from each other. One can estimate percentage difference as the ratio (expressed in percentage) of the difference in volume to the

volume of a marble (by either method).

Percentage difference = _____

તમે નોંધ્યું હશે કે આ બે પદ્ધતિઓ દ્વારા પ્રાપ્ત થયેલ ઘનફળ એક બીજાથી થોડા અલગ છે. લખોટીના ઘનફળમાં તફાવત અને લખોટીનું ઘનફળ (કોઈપણ પદ્ધતિ દ્વારા) નો ગુણોત્તરથી આ તફાવતના ટકાનો અંદાજ મેળવી શકાય છે.

તફાવતના ટકા = _____

- Dividing the end-to-end length by the number of marbles will give the mean diameter of the marbles. Have a discussion with the students on whether the diameter of each marble is exactly equal to the answer they wrote. If not, what does this answer signify?

લખોટીઓની સંખ્યાનો એક છેડાથી બીજા છેડા સુધીની લંબાઈ ને વિભાજિત કરવાથી લખોટીનું સરેરાશ વ્યાસ મળશે. દરેક લખોટીનો વ્યાસ તેઓએ લખેલા જવાબોથી બરાબર છે કે, આ વિષય પર વિદ્યાર્થીઓ સાથે ચર્ચા કરો. જો નહીં, તો આ જવાબ શું સૂચવે છે?

- For our set of marbles, the end-to-end length of the line of marbles was (for 10 marbles) ~ 15.1 cm, i.e., the average diameter of a marble was about 1.51 cm. This gives the volume of one marble as

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{22}{7}\right) \times \left(\frac{1.5}{2}\right)^3 = 1.77 \text{ cm}^3.$$

અમારા લખોટીઓના સમૂહ માટે, લખોટીઓની સંખ્યાનો એક છેડાથી બીજા છેડા સુધીની લંબાઈ (10 લખોટીઓ માટે) ~ 15.1 સેમી હતી, એટલે કે, લખોટીનો સરેરાશ વ્યાસ લગભગ 1.51 સેમી આમ એક લખોટીનું ઘનફળ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{22}{7}\right) \times \left(\frac{1.5}{2}\right)^3 = 1.77^3 \text{ સેમી}^3 \text{ તરીકે આપે છે.}$$

- The expression for the percentage difference can be written as: $\frac{|V_{calc} - V_{exp}|}{(V_{calc} \text{ OR } V_{exp})} \times 100 \%$

તફાવતના ટકાનું સૂત્ર આ પ્રમાણે લખી શકાય છે: $\frac{|V_{calc} - V_{exp}|}{(V_{calc} \text{ OR } V_{exp})} \times 100 \%$

- We are using the percentage difference instead of percentage error, because among the two methods, we cannot say which is the accurate measurement. Both methods have inherent possibility of measurement errors.

આપણે ત્રુટિના ટકાના બદલે તફાવતના ટકાનો ઉપયોગ કરી રહ્યાં છીએ, કારણ કે બે પદ્ધતિઓ વચ્ચે, આપણે કહી શકતા નથી કે કયું માપ ચોક્કસ છે. બંને પદ્ધતિઓમાં માપવામાં ત્રુટિઓની સ્વાભાવિક સંભાવના છે.

- The teacher can explain the concept of error qualitatively as follows: There is a clear discrepancy in the volume of one marble obtained in task 2 and that obtained in task 3. This is because in task 2, we calculate the average volume of one marble directly without finding the radius of marbles. On the other hand, in task 3, we find the average radius of a marble and then calculate the volume. In this process, any error in the measurement of the radius leads to larger error in volume as the radius gets cubed (due to $\frac{4}{3}\pi r^3$). This error can be minimised by increasing the number of marbles taken to measure the end-to-end length and then calculating the corresponding average radius of one marble.

શિક્ષક ભૂલની વિભાવનાને ગુણાત્મકરૂપે આ રીતે સમજાવી શકે છે: કાર્ય 2 અને કાર્ય 3 માં મેળવેલા એક લખોટીના ઘનફળમાં સ્પષ્ટ વિસંગતતા છે. કારણ કે કાર્ય 2 માં, આપણે લખોટીની ત્રિજ્યા શોધ્યા વિના સીધા લખોટીના સરેરાશ કદની ગણતરી કરીએ

છીએ. બીજી બાજુ, કાર્ય 3 માં, આપણે લખોટીની સરેરાશ ત્રિજ્યા શોધીએ છીએ અને તેનો ઉપયોગ કરી ઘનફળની ગણતરી કરીએ છીએ. આ પ્રક્રિયામાં, ત્રિજ્યાના માપમાં નાનકડી ભૂલ પણ ઘનફળની ગણતરીમાં મોટી ભૂલ લાવે છે કારણ કે ત્રિજ્યાનો ઘન થાય છે ($\frac{4}{3}\pi r^3$ ને કારણે). લખોટીઓના એક છેડાથી બીજા છેડા સુધીની લંબાઈ માપવા માટે લેવામાં આવતી લખોટીઓની સંખ્યામાં વધારો કરીને, પછી એક લખોટીની અનુરૂપ સરેરાશ ત્રિજ્યાની ગણતરી કરીને આ ભૂલ ઘટાડી શકાય છે.

- Note that the mean volume of marbles is obtained here to a greater accuracy than the accuracy imposed by the least count of our “measuring” cylinder.

ત્રિજ્યા માપીને મેળવેલા લખોટીના ઘનફળની ચોકસાઈ, અંકિત નળાકારના લઘુત્તમ માપ દ્વારા મેળવેલી ગણતરી કરતા વધુ સારી છે, તેની નોંધ લેવી.

- Possible extension: If the students want, they can repeat this with more marbles and/or with random sets of ten marbles each. Will the calculated average volume now be closer to that obtained in task 2?

વિસ્તરણ: જો વિદ્યાર્થીઓ ઇચ્છતા હોય, તો તેઓ વધુ લખોટીઓથી અને/અથવા દરેક દસ લખોટીઓના વિવિધ સમૂહ સાથે પુનરાવર્તન કરી શકે છે. શું હવે ગણતરી કરેલું સરેરાશ ઘનફળ કાર્ય 2 માં મેળવેલા ઘનફળની નજીક હશે?

- Possible extension: Students may also try repeating the tasks 2 and 3 using machined steel balls (like those used in ball bearings) of a size similar to that of the marbles. Since these are usually manufactured to a higher degree of precision than the marbles, the discrepancy in the volume obtained in task 2 and that obtained in task 3 will be smaller.

વિસ્તરણ: વિદ્યાર્થીઓ લખોટીઓના સમાન કદના મશિન સ્ટીલના દડા (જેમ કે બોલ બેરિંગ્સમાં વપરાય છે) નો ઉપયોગ કરીને કાર્ય 2 અને કાર્ય 3 નું પુનરાવર્તન કરવાનો પ્રયાસ કરી શકે છે. આ સ્ટીલના દડા સામાન્ય રીતે લખોટીઓની તુલનામાં વધુ ચોકસાઈથી બનાવવામાં આવે છે, તેથી કાર્ય 2 અને કાર્ય 3 થી મેળવેલા ઘનફળમાં તફાવત ઓછો હશે.

Task 4: Measuring the volume of an irregular stone

કાર્ય 4: અનિયમિત પથ્થરનું કદ માપવું

1. Fill the cylinder with water to the 200 mL mark.

ખાલી અંકિત નળાકાર લો અને તેમાં 200 મિલી ચિન્હ સુધી પાણી ભરો.

2. Put an irregular stone in the water. (The stone should be completely immersed inside the water with the water level at least 2-3 cm above the upper surface of the stone.)

પાણીમાં અનિયમિત પથ્થર મૂકો (આ પથ્થર સંપૂર્ણપણે પાણીની અંદર ડૂબી જવો જોઈએ અને પાણીનું સ્તર પથ્થરથી ઓછામાં ઓછું 2-3 સેમી ઉપર હોવું જોઈએ.)

3. Estimate the volume of the stone by observing the amount of water displaced. Unless the water level matches with one of the markings, this will only be an approximate measurement.

પાણીની વિસ્થાપિત માત્રાનું અવલોકન કરીને પથ્થરના કદનો અંદાજ લગાવો. જો પાણીનું સ્તર કોઈ ચોક્કસ માપ(અંકિત ચિન્હ) સાથે મેળ ન ખાય, તો આ માપ અંદાજીત રહેશે.

4. Now, immerse enough marbles to bring the water level up to the next marking.

હવે, આગલા ચિન્હ સુધી પાણીનું સ્તર પહોંચે, ત્યાં સુધી નળાકારમાં લખોટીઓ નાખો.

Volume of water before adding the stone _____

પથ્થર ઉમેરતા પહેલા પાણીનું કદ - _____

Number of marbles required to raise the water level to the next mark _____

આગલા ચિન્હ સુધી પાણીના સ્તરને વધારવા માટે જરૂરી લખોટીઓ ની સંખ્યા - _____

The irregular stone + _____ marbles displaced _____ volume of water.

અનિયમિત પથ્થર + _____ લખોટીઓ, પાણીના _____ કદ ને વિસ્થાપિત કરે છે.

5. Use the mean volume of marbles, V_{exp} obtained in task 2 to determine the volume of the stone more precisely.

Volume of the irregular stone - _____

કાર્ય 2 માં મળેલું એક લખોટીનું સરેરાશ કદ V_{exp} વાપરો અને અનિયમિત પથ્થરનું વધુ સચોટ કદ મેળવો.

અનિયમિત પથ્થરનું કદ - _____

Note that once the stone is submerged, there needs to be sufficient depth of water above the stone to immerse a few marbles completely. If this is not the case the teacher may consider restarting with a larger amount of water.

નોંધ લો કે એકવાર પથ્થર ડૂબી જાય, પછી થોડી લખોટીઓને સંપૂર્ણપણે ડૂબવા માટે પથ્થરની ઉપર પૂરતું પાણી હોવું જરૂરી છે. જો આવું ન હોય, તો શિક્ષક પાણીના વધુ પ્રમાણ સાથે ફરીથી શરૂ કરવાનું વિચારી શકે છે.

Task 5: A challenge

કાર્ય 5: પડકાર

In this task the students confront their belief that by putting enough number of marbles, the water level will always rise to the top of the container. They may be surprised that this is not the case. The main reason for this, which the students will discover through this task, is that there are gaps between the marbles, even when they are closely packed and the amount of water may be just sufficient to fill these gaps without rising above the level of the marbles.

આ કાર્યમાં વિદ્યાર્થીઓ તેમની માન્યતાનો સામનો કરે છે, કે પૂરતી સંખ્યામાં લખોટીઓ નાખીને, પાણીનું સ્તર હંમેશા વાસણના ઉપર સુધી પહોંચશે. તેમને આશ્ચર્ય થશે કે આ હંમેશા શક્ય નથી. આનું મુખ્ય કારણ, જે વિદ્યાર્થીઓ આ કાર્ય દ્વારા શોધી શકશે, તે છે કે લખોટીઓની વચ્ચે ખાલી જગ્યા હોય છે, પછી ભલે તેઓ ખીચોખીચ ભરેલા હોય. પાણી આ જગ્યાઓમાં ભરઈ જાય છે, જેના કારણે પાણીનું સ્તર લખોટીઓની ઉપર જતું નથી.

1) Fill up the cylinder with water to the 50 mL mark.

નળાકારમાં 50 મિલી ચિન્હ સુધી પાણી ભરો.

2) By adding enough marbles, try to raise the **water level** to the top of the cylinder.

પૂરતા પ્રમાણમાં લખોટીઓ ઉમેરીને, પાણીના સ્તરને નળાકારની ઉપર સુધી લાવવાનો પ્રયાસ કરો.

3) If you do not succeed in raising the water level to the top, note the highest marking to which the water level rises.

જો તમે પાણીના સ્તરને ઉપર સુધી પહોંચાડવામાં સફળ ન થાવ, તો પાણીનું સ્તર જે મહત્તમ ચિન્હ સુધી વધ્યું હોય તેની નોંધ લો.

Maximum marking to which the water level rises _____

જે મહત્તમ ચિન્હ સુધી પાણીનું સ્તર વધી શકે છે, તે - _____

Number of marbles required to increase the volume by this amount _____

ત્યા સુધી પાણીનું સ્તર વધારવા માટે જરૂરી લખોટીઓની સંખ્યા - _____

4) Can you think of an explanation for this?

શું તમે આ માટેનું કોઈ કારણ વિચારી શકો છો?

5) Do you think the thirsty crow would have succeeded in quenching its thirst? Explain your answer.

શું તમને લાગે છે કે તરસ્યો કાગડો તેની તરસ છીપાવવામાં સફળ થયો હશે? તમારો જવાબ સમજાવો.

- The initial volume of water is kept deliberately low so that adding more and more marbles does not bring the water level up to the top. Once this happens, the teacher may support the students in finding the explanation that when objects like marbles are packed as closely as possible, they still have some gaps in between. The water accumulates there and hence never rises above a certain level. Assuming the closest possible packing of the marbles, there is still about a quarter of volume between the marbles that is left over for air or water. Thus, in this task, if the initial volume of water was 50 mL, the water level after adding many marbles will not rise beyond 200 mL. The teacher may also point out to the more interested students that this concept is called the “packing fraction”. Similar concept also becomes important in the theory which explains how atoms are packed together in solids.

પાણીનું પ્રારંભિક સ્તર ઇરાદાપૂર્વક નીચું રાખવામાં આવ્યું છે જેથી વધુ લખોટીઓ ઉમેરવા છતાં પાણીનું સ્તર ઉપર સુધી નહિં આવે. એકવાર આવું થાય તે પછી, શિક્ષક વિદ્યાર્થીઓને સમજૂતી શોધવામાં સમર્થન આપી શકે છે કે જ્યારે લખોટીઓ જેવા પદાર્થો શક્ય તેટલી નજીકથી મુકવામાં આવે છે, ત્યારે તેમની વચ્ચે હજી પણ થોડી ખાલી જગ્યા હોય છે. ત્યાં પાણી એકઠું થાય છે અને તેથી તે ક્યારેય એક સ્તરથી ઉપર વધતું નથી. લખોટીઓને ભારોભાર ભરવા છતાં, લખોટીઓની વચ્ચે હજી પણ લગભગ ચતુર્થાંશ ભાગ છે જે હવા અથવા પાણી માટે બાકી છે. આમ, આ કાર્યમાં, જો પાણીનું પ્રારંભિક પ્રમાણ 50 મિલી હતું, તો ઘણી લખોટીઓ ઉમેર્યા પછી પણ પાણીનું સ્તર 200 મિલીથી વધશે નહીં. શિક્ષક વધુ રસ ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓને પણ નિર્દેશ કરી શકે છે કે આ ખ્યાલને “પેકિંગ ફ્રેક્શન” કહેવામાં આવે છે. આજ ખ્યાલ, ધન પદાર્થોમાં અણુઓ કેવી રીતે ગોઠવાયેલા હોય છે તે સિદ્ધાંતના મહત્વની સમજણ પણ આપે છે.

- Thus, one of the takeaways of this unit is that the thirsty crow would not have succeeded in quenching its thirst if the water level in the pitcher had been too low to begin with.

આ રીતે, આ એકમનો એક ભાગ એવો છે કે, જો વાસણમાં પાણીનું સ્તર પહેલાંથી જ ઓછું હોત, તો કાગડો તરસ્યો જ રહ્યો હોત.

- Only for the teachers: In case of (spherical) marbles, the closest possible packing is called “hexagonal close packed”. The packing fraction for this is $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \sim 0.74$. This means that in the most ideal closest packing, 74% of the volume will be occupied by marbles and at most 26% by water. Further, on the edges of the cylinder, this fraction will be poorer. Hence, we expect water in the task above to rise to between 120-150 mL.

ફક્ત શિક્ષકો માટે: (ગોળાકાર) લખોટીઓના કિસ્સામાં, નજીકના શક્ય પેકિંગને “હેક્સગોનલ ક્લોઝ (બંધ પટકોણ) પેક્ડ” કહેવામાં આવે છે. આ માટેનું પેકિંગ ફેક્શન $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \sim 0.74$ છે. આનો અર્થ એ છે કે સૌથી આદર્શ પેકિંગમાં, 74% કદ લખોટીઓ દ્વારા અને વધુમાં વધુ 26% પાણી દ્વારા વાપરવામાં આવશે. વધુમાં, નળાકારની ધાર પર, આ ફેક્શન ઓછું સચોટ હશે. તેથી, અમે ઉપરના કાર્યમાં પાણીનું સ્તર 120-150 મિલી સુધી વધવાની અપેક્ષા રાખીએ છીએ.

Task 6: Estimating the packing fraction (Optional)

કાર્ય 6: પેકિંગ ફેક્શન નું અનુમાન લગાવવું (વૈકલ્પિક)

i. Fill the marked cylinder with marbles up to the 50 mL mark. Count the marbles as you are putting them in one by one. Give the cylinder a good shake to ensure that the marbles are packed as closely as possible and make sure that the marbles are as close as possible to the level with the 50 mL mark by adding or removing some marbles.

નળાકારમાં એક પછી એક, ગણતરી કરતા 50 મિલી ચિન્હ સુધી લખોટીઓ નાખો. લખોટીઓ શક્ય તેટલી નજીકથી ભરેલી છે તેની ખાતરી કરવા માટે નળાકારને સારી રીતે હલાવો, અને ખાતરી કરો કે લખોટીઓ 50 મિલી ચિન્હ સાથે શક્ય તેટલું નજીક છે. જો તેવું ન હોય, તો લખોટીઓ જરૂર પ્રમાણે ઉમેરો અથવા કાઢી નાખો.

ii. The packing fraction is the ratio of the volume of the marbles filling up the space to the total volume of the space. Can you find the packing fraction using this definition?

પેકિંગ ફેક્શન એ લખોટીઓના કદ અને પૂર્ણ જગ્યાના કદનો ગુણોત્તર છે. શું તમે આ વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને પેકિંગ ફેક્શન શોધી શકો છો?

iii. Repeat this for the 100 mL and the 150 mL mark and find the packing fractions for these trials as well. What do you notice?

100 મિલી અને 150 મિલી ચિન્હ માટે આનું પુનરાવર્તન કરો અને આ પરીક્ષણો માટે પણ પેકિંગ ફેક્શન શોધો. તમે શું તારવશો?

- It should not be difficult for the students to find the average volume of one marble by calculation since they know the average radius of a marble. Multiplying by the number of marbles gives the total volume of the marbles. They already know the total space inside the container from the marked volume (50 mL, 100 mL, or 150 mL as the case may be). So they can find the ratio, which is the packing fraction.

વિદ્યાર્થીઓને ગણતરી દ્વારા એક લખોટીનું સરેરાશ ઘનફળ શોધવું મુશ્કેલ ન હોવું જોઈએ કારણ કે તેઓ લખોટીઓની સરેરાશ ત્રિજ્યાને જાણે છે. લખોટીઓની સંખ્યા સાથે ગુણાકાર કરવાથી લખોટીઓનું કુલ કદ મળે છે. તેઓ પહેલેથી જ ચિન્હો દ્વારા નળાકારના અંદરનું કુલ ઘનફળ જાણે છે (50 મિલી, 100 મિલી, અથવા 150 મિલી તરીકે હોઈ શકે). તેથી તેઓ ગુણોત્તર શોધી શકે છે, જે પેકિંગ ફેક્શન છે.

- This is slightly more challenging: Another method is to plot a graph with the total volume of the marbles on the Y-axis and the total volume of the space occupied by them on the X-axis. By drawing a “best fit” straight line through the points, the slope of the line gives the packing fraction.

આ સહેજ વધુ પડકારજનક છે: બીજી પદ્ધતિ એ છે કે Y-અક્ષ પર લખોટીઓનું કુલ ઘનફળ અને X-અક્ષ પર તેમના દ્વારા રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ દર્શાવતો આલેખ બનાવવો. બિંદુઓ દ્વારા “બેસ્ટ ફીટ” (એવી રેખા દોરવી જે તે બિંદુઓ વચ્ચેના સંબંધને શ્રેષ્ઠ રીતે વ્યક્ત કરે) સીધી રેખા દોરવાથી, રેખાનો ઢાળ પેકિંગ ફેક્શન આપે છે.

- An interesting extension of this activity is to compare the packing fractions obtained by using ball bearings and marbles together, and by varying the diameter of the container.

આ પ્રવૃત્તિનું રસપ્રદ વિસ્તરણ એ છે કે બોલ બેરિંગ્સ અને લખોટીઓનો એક સાથે ઉપયોગ કરીને, તથા વિવિધ વ્યાસના વાસણ લઈને, મેળવેલા પેકિંગ ફ્રેક્શન્ ની તુલના કરવી.

- It may be worth expanding the analogy to explain that groundwater is also filled in the pore spaces of soil particles and stones beneath the ground. Thus even though pore spaces in the soil seem tiny, they hold huge amounts of groundwater that we extract via hand pumps and borewells.

પેકિંગ ફ્રેક્શન્ ની સમજ ને માટીના કણો અને પથ્થરોના છિદ્રોમાં રહેલ ભૂગર્ભજળ સાથે સરખાવીને વિસ્તૃત કરી શકાય. જમીનના છિદ્રો નાના હોવા છતાં, તે ભૂગર્ભજળની વિશાળ માત્રા ધરાવે છે, જેને આપણે હેન્ડપમ્પ અને બોરવેલ દ્વારા કાઢીએ છીએ.

- Figure 4 below shows “hexagonal close packing” that you may have observed in the stacking of balls or of fruits in the market.

નીચે ની આકૃતિ 4 “હેક્સાગોનલ ક્લોઝ પેકિંગ” બતાવે છે જે તમે દડા અથવા બજારમાં ફળોના ગોઠવવામાં જોઈ શકો છો.

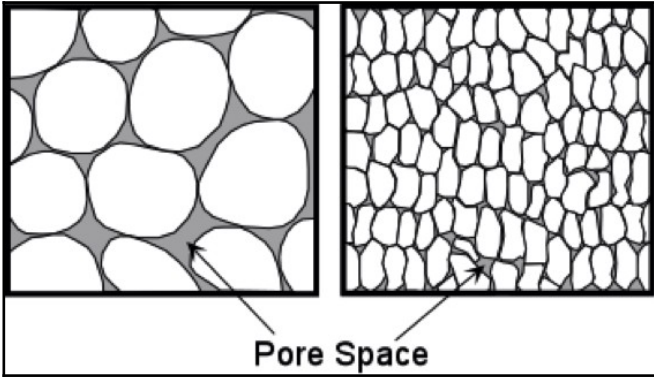


Figure T2 : Pore space between soil particles

આકૃતિ T2 : જમીનના કણો વચ્ચેની છિદ્રોવાળી જગ્યા



Figure T3 : Fruits stacked in a fruit stall

આકૃતિ T3 : ફળોની દુકાનમાં ગોઠવેલા ફળો

Idea for further extension

વધુ વિસ્તરણ માટેનો વિચાર

What happens if we use a bottle with smaller or larger diameter or if we use marbles that are larger or smaller? Does the packing fraction change?

જો આપણે નાના/મોટા વ્યાસવાળી બોટલ અથવા નાની/મોટી લખોટીઓનો ઉપયોગ કરીશું તો શું થશે? શું પેકિંગ ફ્રેક્શન્ બદલાશે?

Suggested readings

વધારે માહિતી માટે

1. An advanced discussion on pores in soils and their relationship to various processes and phenomena taking place in soil can be found at:

જમીનમાંના થતા વિવિધ ઘટનાઓ અને પ્રક્રિયાઓ નો માટીમાં રહેલા છિદ્રો સાથેના તેમના સંબંધ વિશેની વિસ્તૃત માહિતી અહીં મળી શકે છે:

Nimmo, J. R. (2013). Porosity and pore size. *Reference Module in Earth Systems and Environmental Sciences*. Elsevier.doi: 10.1016/B978-0-12-409548-9.05265-9

Retrieved from:

https://wwwrcamnl.wr.usgs.gov/uzf/abs_pubs/papers/nimmo.13.porosityencyc.rmes.pdf

2. The overflow principle, the principle that when a body is immersed in a liquid, it displaces an equal volume of the liquid, is often confused with the related but different Archimedes principle. The latter states that equivalence of the force of bouyancy and the weight of the displaced fluid. For an explanation see this link :

ઉભરાવનો (ઓવરફ્લો) સિદ્ધાંત, કે જ્યારે કોઈ વસ્તુ પ્રવાહીમાં ડૂબી જાય છે, ત્યારે તે પ્રવાહીની સમાન માત્રાને સ્થાનાંતરિત કરે છે. આ સિદ્ધાંત સંબંધિત પરંતુ અલગ આર્કિમિડીઝ સિદ્ધાંત સાથે ઉભી કરે છે. આર્કિમિડીઝ સિદ્ધાંત તારણબળ અને વિસ્થાપિત પ્રવાહીના વજનની સમકક્ષતા દર્શાવે છે. સમજૂતી માટે આ લિંક જુઓ:

<https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html>

Credits

Main Authors: Joseph Amalnathan, Praveen Pathak, Pranay Parte

Contributing Authors: K. K. Mashood, Tripti Bameta

Reviewers: Arnab Bhattacharya, Vandana Nanal, Deepa Chari

Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam

Gujarati Translator: AmisH Parmar

Gujarati Editors: Bhavana Trivedi, Parag Shah

Gujarati Editorial Assistance: AmisH Parmar, Jayesh Parmar

Creative Commons Licence: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE