

8.09

चौकटींवरील आयत

Exploring a square grid through rectangles

Main Authors: Aaloka Kanhere, K. Subramaniam

Reviewers: Amber Habib, Amol Dighe, H. C. Pradhan, Jonaki Ghosh, Sneha Titus

English Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam

Marathi Translator: Pranali Parab

Marathi Editors: Deepa Chari, Vijay D. Lale

Marathi Editorial Assistance: Aaloka Kanhere, Sushma Rawool, Nilkantha Gholap

Creative Commons Licence: CC BY-SA 4.0 International

8.9. चौकटींवरील आयत

Exploring a square grid through rectangles

आढावा Overview

विद्यार्थी निरीक्षण करतात आणि आकृतिबंध ओळखतात. त्यांच्या निरीक्षणांवरून ते काही निष्कर्षदेखील काढतात. परंतु त्यांचे सर्व निष्कर्ष वैध असतील, असे नाही (त्यांचे निष्कर्ष काही बाबतीत वैध असू शकतील, परंतु ते सर्व बाबतीत वैध नसतील). आता हा प्रश्न पाहूया “आयताची परिमिती वाढल्यास त्याच्या क्षेत्रफळात काय बदल होईल?” यावर बरेच विद्यार्थी उत्तर देतील की “परिमिती वाढली तर क्षेत्रफळदेखील वाढेल”. परंतु हे उत्तर बरोबर नाही.

Students observe and recognize patterns. Based on their observations, they draw some conclusions. But not all the conclusions are valid. These conclusions may be valid in some cases but not in all cases. Consider the question - “What will happen to the area of the rectangle if its perimeter increases?” Many students answer that “with an increase in perimeter, the area also increases”, which is not true.

या अध्ययन घटकामध्ये, विद्यार्थी चौकट कागदावरील बिंदू वापरून या व अशा इतर प्रश्नांची उत्तरे शोधतील, तसेच चौकट कागदावर विविध आयत तयार करतील. त्यांच्या निरीक्षणांवरून ते असा निष्कर्ष काढतील की आयताचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात कोणताही थेट संबंध नसतो.

In this Learning Unit, students will explore this question and more such questions using a dot grid and construct various rectangles on it. Based on the observations, they will arrive at the conclusion that there is no obvious relationship between the area and perimeter of rectangles.

एक महत्त्वाची कल्पना अशी की एखादे विधान सत्य नाही, हे समजून घ्यायचे असेल तर आपल्याला विधानाची प्रति-उदाहरणे शोधण्याची आवश्यकता असते. हे घटक करत असताना, गणिताच्या विधानाची अचूकता सिद्ध करण्यासाठी फक्त उदाहरणे देणे पुरेसे नसते; पण विधान चुकीचे सिद्ध करायचे असेल तर केवळ एक प्रति-उदाहरण पुरेसे असते, यावर चर्चा करा.

An important idea is that we need to look for counter-examples to understand statement is not true. As a part of this unit, discuss how in the case of establishing the correctness of a mathematical result, giving examples is not enough; in the case of proving a result wrong, counter-examples are enough.

या प्रश्नांबाबत इतर संदर्भ -जसे अध्ययन घटक 8.1 आणि 8.14 - वापरून चर्चा केली जाऊ शकते. ही कृती विद्यार्थी स्वतःहून करू शकतात. मात्र, विद्यार्थी कृती करत असताना त्यांच्यात चर्चा घडून येण्यासाठी प्रोत्साहित करावे.

These questions can be also explored using other contexts, such as those discussed in LU 8.1 and LU 8.14. This activity may be attempted by students individually. However, discussions between students may be encouraged as they attempt the tasks.



किमान आवश्यक वेळ
Minimum time required

40 मिनिटांची तीन सत्रे
Three sessions of 40 mins each



अध्ययन घटकाचा प्रकार
Type of learning unit

वर्गामध्ये
Classroom

अध्ययन घटकाची उद्दिष्टे Unit-specific objectives

- चौकट कागदावर आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती काढणे
To find the areas and perimeters of rectangles on a dot grid
- आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांवर आधारित अनुमाने तयार करणे
To formulate conjectures based on the areas and perimeters of rectangles
- आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यातील संबंध समजून घेणे
To understand the relationship between the area and perimeter of rectangles

पूर्वज्ञान Prerequisites

विद्यार्थ्यांना आयत आणि त्रिकोण यांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांविषयी मूलभूत माहिती असणे गरजेचे आहे.
Students should have a basic understanding of area and perimeter of rectangles and triangles.

ओळख Introduction

तुम्ही त्रिकोण आणि आयत यांसारख्या आकृतींचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती अनेकदा काढली असेल. एखाद्या आकृतीचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात संबंध काय असतो, याचा विचार तुम्ही कधी केला आहे का? जेव्हा आकृतीचे क्षेत्रफळ वाढते तेव्हा काय होते? परिमिती वाढते की कमी होते? जर परिमिती कमी झाली तर क्षेत्रफळाचे काय होते?

You have calculated areas and perimeters of figures like rectangles and triangles many times. Have you ever wondered what is the relationship between area and perimeter of a figure? What happens when area increases? Does the perimeter increase or decrease? What happens to the area if the perimeter decreases?

येथे, आयताचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात असलेला संबंध आपण शोधणार आहोत. मात्र, हे करताना आपल्यासमोर एक महत्त्वाची अट आहे - आपण असे आयत पाहणार आहोत जे चौकट-कागदावर (आकृती 1अ आणि 1ब पहा) काढता येऊ शकतात. म्हणजेच या आयतांचे कोपरे (शिरोबिंदू) हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत.

Here, we will explore the relationship between the area and perimeter of rectangles. We will do this, however, with an important constraint – the rectangles will be those that can be drawn on a square grid such that the corners (vertices) of the rectangles are grid points (See Figure 1a and Figure 1b)

तुमच्याकडे असलेला चौकट-कागद नीट पहा.

Look at the grid paper you have.

चला, रेषाखंड AB ची लांबी 1 एकक आहे, असे मानूया (आकृती 2 अ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे).

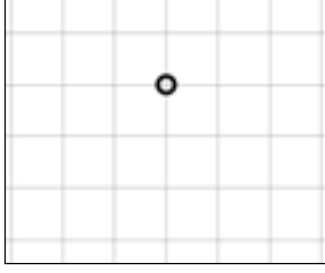
Let us call the length of the line segment AB (shown in figure 2a) as one unit of length



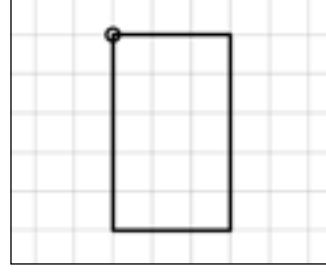
साहित्य Materials

चौकट-कागद (प्रत्येक विद्यार्थ्याला साधारणपणे तीन ते चार चौकट-कागद लागतील), पेन्सिल

Grid papers (each student will require three to four square grid papers), pencil



आकृती 1 अ
Figure 1 a



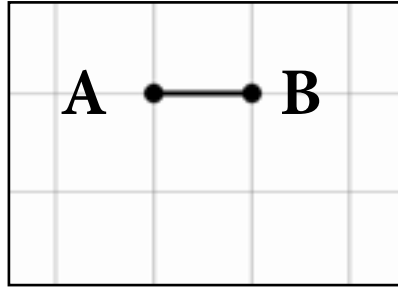
आकृती 1 ब चौकट कागदावर काढलेला आयत
Figure 1 b Rectangle drawn on square grid

चौकट-कागदवर एकक म्हणून इतर कोणत्या लांबीचा विचार करता येईल, ते विद्यार्थ्यांना विचारा. एकक म्हणून कर्ण निवडल्यास काय होईल, याची चर्चा करा.

Ask the students what are the other lengths they can consider as units on the grid paper. Discuss what will happen if the diagonal is chosen as the unit.

जर आपण कर्णाची लांबी एक एकक मानली, तर रेषाखंडाची लांबी $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एकक इतकी होईल, जी हाताळणे कमी सोयीची असेल.

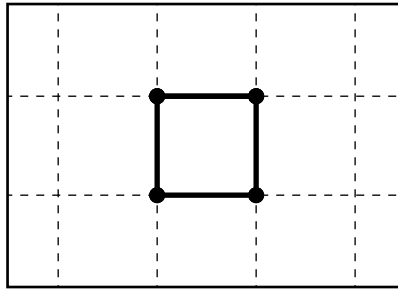
If we consider the diagonal as one unit, then the length of the line segment is $\frac{1}{\sqrt{2}}$ units, which is less convenient to deal with.



आकृती 2 अ
Figure 2 a

आता, रेषाखंड AB ची लांबी एक एकक मानल्यास आकृती 2 ब मधील आकाराचे क्षेत्रफळ किती असेल, ते सांगा? असे तुम्हाला का वाटते, याबद्दल आपापसांत चर्चा करा.

Now, considering the above length as one unit, what can you say about the area of the shape in figure 2b? Why do you think so? Discuss with your friends.



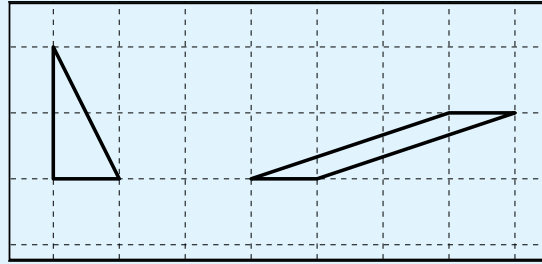
आकृती 2 ब
Figure 2 b

या टप्प्यावर, थोडा वेळ घ्या आणि तुमच्या विद्यार्थ्यांबरोबर 'क्षेत्रफळ हे एक चौरस एकक आहे' याचा अर्थ काय होतो, याबाबत चर्चा करा. यावर भर द्या की एक चौरस एकक क्षेत्रफळ म्हणजे ज्या चौरसाच्या बाजूची लांबी एक एकक आहे अशा चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे क्षेत्रफळ. चौरसाचे क्षेत्रफळ केवळ बाजू \times बाजू असते, म्हणून नाही.

At this point, do take some time out and discuss with your students about the meaning of 'the area is one square unit'. Try to emphasise the fact that - any area equal to the area covered by a square of side one unit length - is defined to be one square unit, and is not just because the area of a square is side \times side.

विद्यार्थ्यांना एक चौरस एकक क्षेत्रफळाचे वेगवेगळे आकार काढायला सांगताना, या आकारांचे क्षेत्रफळ 'एक चौरस एकक' का आहे, ते विचारा. लक्षात ठेवा की एक एकक लांबी ही दोन लगतच्या बिंदूंमधील अंतर आहे. पुढे काही उदाहरणे दिली आहेत

While asking the students to draw different shapes of area one square unit, ask them why they think these shapes have area one sq unit. Remember that one unit length is the distance between two adjacent dots. Some examples are given here:



आकृती T 1

Figure T 1

विद्यार्थ्यांनी एक चौरस एकक क्षेत्रफळाच्या आकृत्या काढल्यानंतर त्यांना उत्तराचे स्पष्टीकरण विचारा.

After the students have drawn figures of area one square unit, ask them to justify their answers.



कृती 1: एक एकक क्षेत्रफळाचे अजून आकार...?

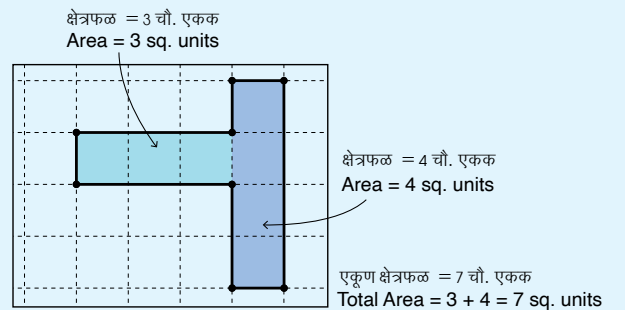
Task 1: Any more unit areas...?

आणखी किमान दोन आकृत्या अशा काढा, ज्यांचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक असेल.

Draw a few more (at least two) figures such that their areas are also one square unit.

पुढील कृती करताना, विद्यार्थ्यांना निरनिराळ्या सरळरेषीय आकृत्या (अशा आकृत्या ज्यांचे सर्व कोन 90° किंवा 270° असतात) काढायला प्रोत्साहित करा. या कृतीचा मुख्य उद्देश असा आहे की क्षेत्रफळ म्हणजे केवळ एक सूत्र नसते आणि प्रत्यक्ष चौकट कागदावरील एकक चौरसांची संख्या किंवा अर्ध-चौरसांची संख्या मोजून ते क्षेत्रफळ काढू शकतात हे विद्यार्थ्यांना समजायला हवे. एका सरळरेषीय आकाराचे क्षेत्रफळ मोजण्याची पद्धत आकृती T2 मध्ये दाखवली आहे.

In the following task, encourage the students to draw various rectilinear figures. The main objective of this activity is for the students to realise that area is not just a formula, and that they can actually find the area simply by counting the units squares or half-squares on the dot grid. One way to calculate the area of a rectilinear shape is shown in figure T2.



आकृती T2

Figure T2



कृती 2: जेव्हा लगतच्या बाजू एकमेकांना लंब असतील तर...

Task 2: When all adjacent sides are perpendicular...

आकृती 3 मध्ये काढलेल्या बहुभुजाकृतींना 'सरळरेषीय बहुभुजाकृती' म्हणतात.

The polygons drawn in figure 3 are called rectilinear polygons.

लक्षात घ्या, या आकृत्यांचे सर्व शिरोबिंदू हे चौकटीच्या बिंदूवर असले पाहिजेत.

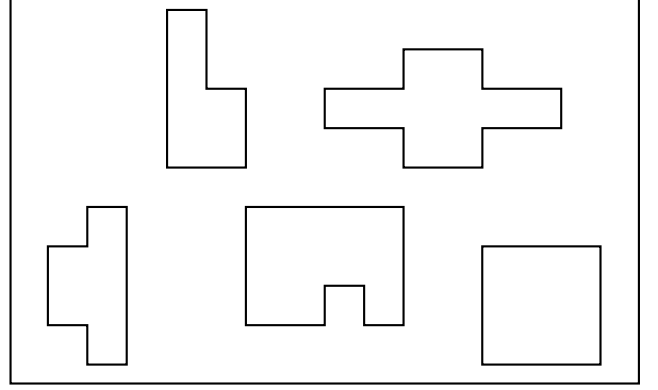
Remember that all the vertices of these figures should be on the grid points.

सरळरेषीय बहुभुजाकृती ही अशी एक बहुभुजाकृती असते, जिचे कोन एकतर 90° किंवा 270° असतात. पुढे सरळरेषीय बहुभुजाकृतींचे काही आकार दाखवले आहेत.

A rectilinear polygon is a polygon, all of whose angles are either 90° or 270° . Some examples of rectilinear shapes are given here.

अशा प्रकारच्या पाच आकृत्या काढा आणि त्यांचे क्षेत्रफळ तसेच परिमिती काढा.

Draw five such figures and find their areas and perimeters.



आकृती 3
Figure 3

पुढील कृतीमध्ये, विद्यार्थ्यांच्या हे लक्षात आणून देण्याचा प्रयत्न करा की वर दिलेल्या आकृत्या एखाद्या सरळरेषीय आकृतीतील काही त्रिकोण कापून किंवा एखाद्या सरळरेषीय आकृतीला काही त्रिकोण जोडून मिळू शकतात. म्हणूनच त्यांचे क्षेत्रफळ काढण्याचा एक मार्ग म्हणजे उल्लेख केलेल्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ मिळवणे किंवा वजा करणे. या कृतीचे मुख्य उद्दिष्ट हे आधीच्या कृतीसारखेच आहे. या कृतीमुळे विद्यार्थ्यांना मोजून, बेरीज करून आणि वजाबाकी करून क्षेत्रफळ काढायला प्रोत्साहन मिळेल.

In the following task, try to bring to the students' attention that the figures given below can be found by cutting some triangles from a rectilinear figure or adding some triangles to a rectilinear figure. And hence one way to calculate their area is to add or subtract the area of the said triangles. The main objective of this activity is similar to the earlier one. This activity will encourage students further to calculate area by counting, adding and subtracting.

तसेच या सरळरेषीय आकृत्या आहेत किंवा नाहीत, हे विद्यार्थ्यांना विचारा आणि त्या सरळरेषीय आकृत्या का नाहीत, याचे स्पष्टीकरण त्यांना सांगू द्या.

Also ask the students if these figures are rectilinear figures or not and let them reason why these figures are not rectilinear figures.

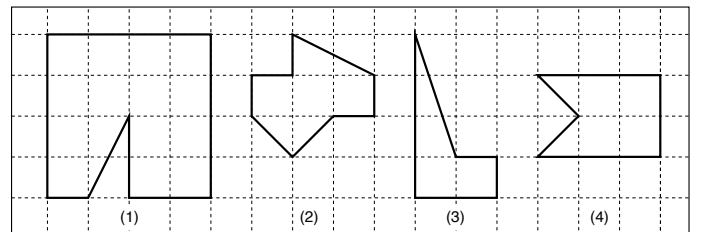


कृती 3: जर लगतच्या काही बाजू लंब नसतील तर...?

Task 3: What if some adjacent sides are NOT perpendicular...?

आकृती 4 मध्ये काही बहुभुजाकृती आहेत. त्या आकृत्यांचे क्षेत्रफळ काढा.

Figure 4 shows some polygons. Find the area of the given figures.



आकृती 4
Figure 4

पुढील कृतीमध्ये, विद्यार्थ्यांना पर्यायी पद्धती वापरून क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी प्रोत्साहित करा. क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी प्रत्येकाने सूत्र वापरायला हवे, असे नाही; ते आयताच्या आतल्या भागातील एकक चौरसांची संख्या मोजू शकतात किंवा आयतांना चौरसांमध्ये विभागू शकतात आणि त्यांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज करू शकतात, किंवा त्रिकोण बनवू शकतात आणि त्यांचे क्षेत्रफळ काढू शकतात. वेगवेगळ्या पद्धतींचा वापर केल्यामुळे एखाद्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ कसे काढतात हे विद्यार्थ्यांना समजेल. वेगवेगळ्या पद्धती वापरल्या तरीही क्षेत्रफळ सारखेच येते, हेही त्यांच्या लक्षात येईल.

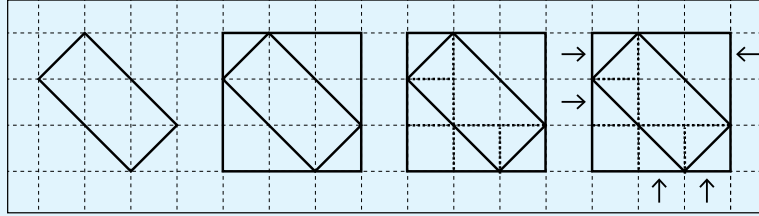
For the following task, encourage the students to measure areas using alternative methods. It is not necessary that everyone uses the formula to calculate area; they can count the number of unit squares inside the rectangles, or divide the rectangles into squares and add their areas, or make triangles and find the area. Different methods will also give them assurance of how the measure of the region—i.e., area remains the same even if different methods are used.

जेव्हा विद्यार्थी तिरके आयत काढतील, तेव्हा त्यांना अशा आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती काढण्याच्या पद्धती शोधायला सांगा.

When students come up with rectangles which are not aligned to the two perpendicular axes, ask them to explore the possibility of finding the areas and perimeters of these rectangles.

तिरक्या आयताचे क्षेत्रफळ शोधण्याची एक पद्धत म्हणजे आकृती T3 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे आयताभोवती चौरस काढणे आणि चौरसातील त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ वजा करणे.

One of the ways of finding the area of a tilted rectangle is to surround the rectangle with a square and remove the areas of the triangles as shown in figure T3.



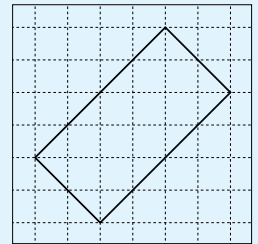
आकृती T3
Figure T3

विद्यार्थ्यांना आकृती T4 मधील आयताची परिमिती काढणे कठीण जाऊ शकते. तुम्ही त्यांना पायथागोरसचे प्रमेय वापरायला सांगून लांबी काढायला सांगू शकता आणि लांबी किती असू शकते, याबाबत चर्चा करायला प्रोत्साहित करू शकता. वर्गमुळांची बेरीज कशी करतात, (उदा., $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ होते आणि $\sqrt{8}$ होत नाही) हे विद्यार्थ्यांना माहित करून देण्याची गरज पडू शकते. जर काही विद्यार्थ्यांनी $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ असे सुचवले, तर त्यांना उत्तराचे स्पष्टीकरण द्यायला सांगा. $\sqrt{8}$ चुकीचे उत्तर आहे हे समजून घ्यायला विद्यार्थ्यांना मदत करा. हे समजून देण्यासाठी दोन्ही राशींचा वर्ग करणे, हा एक मार्ग असू शकतो ($4\sqrt{2}$ आणि $\sqrt{8}$ या संख्या समान नाहीत, हे दाखवून द्या).

The students might find it difficult to find the perimeter of the rectangle in figure T4. You can ask them to calculate the length using Pythagoras' theorem and encourage them to discuss what the length can be. This might need you to introduce to the students how square roots can be added (e.g., $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ and not $\sqrt{8}$). If some of the students suggest that $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$, ask them to justify their answer. Help them see that this is not the case. One way to do this is to square both the entities ($4\sqrt{2}$ and $\sqrt{8}$) and see that they are not equal.

येथे एक महत्त्वाची गोष्ट लक्षात घेणे गरजेचे आहे की चौकट कागदावरील कोणत्याही तिरक्या आयतासाठी, आयताची बाजू \sqrt{n} च्या पटीत असते, जेथे n ही नैसर्गिक संख्या असते.

The important thing is to note that for any tilted rectangle on the grid, the side of the rectangle is of the type \sqrt{n} , where n is a natural number.



आकृती T4
Figure T4

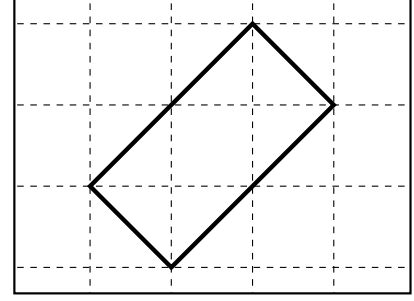
कृती 4: चला आयत पाहू या ...?

Task 4: Focusing on rectangles...

चौकट-कागदावर पाच आयत काढा. हे करताना पुढील बाबी लक्षात ठेवा:

Draw five rectangles on the grid paper. Keep in mind the following:

1. आयताचे शिरोबिंदू हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत.
The vertices of the rectangles should be grid points.
2. आयत वेगवेगळ्या मापाचे असले पाहिजेत.
The rectangles should be of different sizes.
3. किमान एक तरी आयत तिरका (कललेला) असला पाहिजे.
At least one of the rectangles should be tilted.
4. तिरके आयत वगळता, इतर आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती मोजा आणि लिहा. तुम्हाला उत्तरे कशी मिळाली, याबद्दल चर्चा करा.
Measure and write the area and the perimeter of the rectangles which are not tilted. Discuss how you got your answers.



आकृती 5 : तिरका आयत
Figure 5 : Tilted rectangle

आयताचे शिरोबिंदू हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत! (आकृती 1 पहा)
The vertices of the rectangles should be grid points!

पुढील कृतीतील प्रत्येक उपकृतीसाठी, फळ्यावर तक्ता T1 प्रमाणे एक तक्ता काढा आणि विद्यार्थ्यांनी काढलेली मापे नोंदवा (तक्ता T1 मध्ये, 12 एकक परिमिती असलेले एक उदाहरण दिले आहे).

For every sub-task in the next task, draw a table like table T1 on the board and record the students' findings. (Table T1 provides one example for perimeter equal to 12 units.)

परिमिती 12 एकक Perimeter is 12 units			
आयत Rectangle	लांबी Length	रुंदी Breadth	क्षेत्रफळ Area
i	1	5	5
ii	2	4	8
iii	3	3	9
iv	4	2	8
v	5	1	5

तक्ता T1

Table T1

जेव्हा तुम्ही तक्त्यामध्ये नोंद कराल तेव्हा लांबी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने नोंद करण्याचा प्रयत्न करा, जेणेकरून विद्यार्थ्यांना लांबी आणि रुंदी यांच्यातील आकृतिबंध लक्षात येईल. तसेच कोणते आयत एकरूप आहेत आणि कोणते एकरूप नाहीत आणि का?, याची विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करा.

While you are recording in the table, you can try to record the lengths in ascending or descending order so that the students notice a pattern in the length and the breadth. Discuss with the students which rectangles are congruent (same) and which are not. And why?

तक्त्यांशिवाय, लांबी विरुद्ध क्षेत्रफळ यांचा आलेख काढू शकता. आलेखामुळे सममिती अधिक स्पष्ट होऊ शकते.

Apart from tables, you can also use graphs, or plots of lengths versus area. Plots make some of the symmetry more visible.

आपण त्यांच्या लक्षात आणून देऊ शकता की जेव्हा परिमिती 16 एकक आहे, तेथे सर्वात मोठे क्षेत्रफळ चौरसाने व्यापलेले आहे (लांबी आणि रुंदी समान आहे). जेव्हा परिमिती 18 एकक आहे तेव्हा लांबी आणि रुंदी यांच्यातील फरक शक्य तितका कमी असल्याने सर्वात मोठे क्षेत्रफळ मिळते. आपण पूर्ण संख्यांचा वापर करत असल्याने सर्वात कमी फरक 1 असतो हे लक्षात आणून द्या.

You can also bring to their notice that in case of perimeter 16 units, the largest area is occupied by the square (length and breadth are equal). In the case of 18, the largest area is covered when the difference between the length and the breadth is the lowest possible. Do point out that the difference of 1 is the lowest possible because we are working with whole numbers.

16 आणि 18 या दोन संख्या आपण परिमिती म्हणून निवडल्या आहेत, कारण त्यापैकी एका संख्येसाठी (16) आपल्याला एक चौरस मिळतो ज्याचे क्षेत्रफळ 16 चौरस एकक आहे. मात्र दुसऱ्या संख्येसाठी (18) चौरस मिळत नाही. तुम्ही चर्चा करू शकता की परिमिती ही 4 च्या पटीत असल्यावरच तुम्हाला तेवढ्याच परिमितीचा चौरस मिळतो. म्हणून येथे असे प्रश्न आपण विचारू शकता की, “चौकट कागदावर 22 परिमितीचा चौरस असू शकेल का?” त्यांच्या उत्तरांची कारणे द्यायला सांगा.

The two numbers 16 and 18 have been chosen as perimeters, because for one of them (16) you get a square of area i.e., 16 square units, and for the other (18) you do not. You can discuss that a number has to be a multiple of 4 to get a square whose perimeter is that number.

So there can be questions like, “Can there be a square of perimeter 22 on the grid?” Ask them to give reasons for their answers.

या अध्ययन घटकामधील सर्व उप-कृतीसाठी, जेव्हा तुम्ही तक्त्यामध्ये नोंद कराल, तेव्हा तुम्ही लांबी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडण्याचा प्रयत्न करू शकता, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना लांबी आणि रुंदी यांच्यातील आकृतिबंध लक्षात येईल.

For all the sub-tasks in this unit, while you are recording in the table, you can try to record the lengths in ascending or descending order so that the children notice a pattern in the length and the breadth.



कृती 5: परिमिती समान, पण आयत वेगळे ...?

Task 5: Perimeter same, but rectangles different...?

उपकृती 1

Sub task 1

- तुमच्या चौकट-कागदावर असे वेगवेगळे आयत काढा, ज्यांची परिमिती 16 एकक असेल (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा). Draw different rectangles on your square grid, all of which have a perimeter of 16 units. (Draw as many as you can.)
- तुमच्या आयतांच्या माहितीवर आधारित पुढे दिलेला तक्ता भरा. Complete the table given below based on your rectangles.
- कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वात जास्त आहे? कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वात कमी आहे? _____ Which rectangle has the largest area? Which rectangle has the smallest area? _____
- तुमच्या तक्त्यातील माहितीची तुलना इतरांच्या तक्त्यातील माहितीशी करा. Compare your table with those of your friends.
- तुमच्या तक्त्यानुसार त्यात एखादा ‘चौरस’ आहे का? चौरस हा आयत असतो का? _____ Did you get a square in your table? Is a square also a rectangle? _____

नोंद: आयताची ‘अर्धपरिमिती’ ही त्याच्या परिमितीच्या अर्धी असते.

Note: “Semi-perimeter” of the rectangle is half of the perimeter.

परिमिती 16 एकक Perimeter is 16 units				
आयत Rectangle	लांबी Length	रुंदी Breadth	अर्धपरिमिती Semi-perimeter	क्षेत्रफळ Area
i				
ii				
...				

तक्ता 1
Table 1

उपकृती 2
Sub task 2

- तुमच्या चौकट-कागदावर असे वेगवेगळे आयत काढा, ज्यांची परिमिती 18 एकक असेल (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).
Draw different rectangles on your square grid, all of which have a perimeter of 18 units. (Draw as many as you can.)
- तुमच्या आयतांच्या माहितीवर आधारित पुढे दिला तक्ता भरा.
Complete the table given below based on your rectangles.
- कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वात जास्त आहे? कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वात कमी आहे? _____
Which rectangle has the largest area? Which rectangle has the smallest area? _____
- तुमच्या तक्त्यातील माहिती आणि इतरांची माहिती यांच्यात तुलना करा.
Compare your table with the tables drawn by your friends.
- तुमच्या तक्त्यानुसार त्यात एखादा चौरस आहे का? _____
Did you get a square in your table? _____

परिमिती 18 एकक Perimeter is 18 units				
आयत Rectangle	लांबी Length	रुंदी Breadth	अर्धपरिमिती Semi-perimeter	क्षेत्रफळ Area
i				
ii				
...				

तक्ता 2
Table 2

आयताचे शिरोबिंदू हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत! (आकृती 1 पहा)
The vertices of the rectangles should be grid points!

पुढील कृतीत, प्रत्येक उपकृतीसाठी, फळ्यावर एक तक्ता T2 सारखा तक्ता काढा आणि विद्यार्थ्यांचे निष्कर्ष नोंदवा.

In the next task, for every sub-task, draw a table like Table T2 on the board and record the students' findings.

जेव्हा क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक असेल तेव्हा चौरसाची (प्रत्येक बाजू 6 एकक) परिमिती सर्वात कमी असेल, ही गोष्ट लक्षात आणून घ्या. तसेच एखाद्या दिलेल्या क्षेत्रफळासाठी दोन लांबीमधील फरक जितका मोठा असेल, तितकी परिमिती जास्त असेल हे सांगा.

In the case of 36 square units, try to bring out the fact that the square (each side 6 units) has the lowest perimeter. And that for a given area, larger the difference between the two lengths, the greater is the perimeter.

क्षेत्रफळ _____ चौरस एकक Area is _____ square units.				
आयत Rectangle	लांबी Length	रुंदी Breadth	अर्धपरिमिती Semi-perimeter	परिमिती Perimeter
i				
ii				
...				

तक्ता T2
Table T2

कृपया लक्षात घ्या की पुढे दिलेल्या उपकृतींपैकी कमीत कमी दोन उपकृतींसाठी तुम्हाला तिरक्या आयतांची किमान एक जोडी मिळेल, ज्यांचे क्षेत्रफळ वर दिलेल्या क्षेत्रफळाएवढे असेल.

Please note that for at least two of the sub-tasks given below, you will get at least one pair of tilted rectangles whose area would be the required area.

जर विद्यार्थ्यांना स्वतःहून ही उदाहरणे सुचली नाहीत, तर त्यांना तिरके आयत काढण्यासाठी सूचनिका (hint) द्या आणि त्यांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती काढायला सांगा.

If the students do not come up with these examples themselves, give them clues to draw these tilted rectangles and find their areas and perimeters.

या कृतीमध्ये, विद्यार्थी तीन संख्यांचा वापर करतील; 36, 17 आणि 24. यांपैकी प्रत्येक संख्येसाठी वेगवेगळ्या प्रकारचे आयत काढतील, ज्यांचे क्षेत्रफळ तीच संख्या असेल.

In these tasks, the students will work with 3 numbers; 36, 17, and 24. Each of these numbers gives different types of rectangles whose area is that number.

क्षेत्रफळ 36 असलेल्या काही आयतांबरोबर तुम्हाला एक चौरस (6 एकक बाजूचा) मिळेल; तुम्हाला तिरके आयतदेखील मिळतील ज्यांचे क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक असेल. क्षेत्रफळ 17 साठी, तुम्हाला एक असा आयत मिळेल ज्याच्या बाजू चौकट कागदाच्या अक्षाला समांतर असतील, जो निश्चितपणे चौरस नसेल. परंतु तुम्हाला क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक असलेला तिरका चौरस मिळेल (आकृती T5 पहा). क्षेत्रफळ 24 च्या बाबतीत, तुम्हाला चौकट कागदावर चौरस मिळणार नाही, परंतु असे आयत मिळतील जे दोन्ही, सरळ आणि तिरके असतील. विशेष म्हणजे, क्षेत्रफळ 24 च्या बाबतीत तुम्हाला एक तिरका आयत मिळेल, जो 8 चौरस एकक क्षेत्रफळ असलेल्या 3 तिरक्या चौरसांनी मिळून बनलेला असेल (आकृती T6 पहा).

In the case of 36, you get a square (side 6 units) along with a few more rectangles; you will also get tilted rectangles whose area is 36 square units. For 17, you get 1 rectangle whose sides are parallel to the grid axis, which is definitely not a square. But you get a tilted square of area 17 square units. (see figure T5). In the case of 24, you don't get a square on the grid but get rectangles both straight and tilted. Interestingly, in case of 24, you get a tilted rectangle which is 3 copies of a tilted square of area 8 square units (see figure T6).



कृती 6: आता, काही समान क्षेत्रफळाचे आयत...?

Task 6: Now, some same area rectangles ...?

उपकृती 1

Sub task 1

- तुमच्या चौकट-कागदावर क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक असलेले वेगवेगळे आयत काढा. (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा)
Draw different rectangles which have an area of 36 square units. (Draw as many as you can.)

- दिलेल्या तक्त्यात माहिती भरा.
Fill the given table.
- तुम्हाला एखादा चौरस मिळाला का? _____
Did you get a square? _____
- तुमच्या तक्त्यातील माहिती आणि इतरांची माहिती यांच्यात तुलना करा.
Compare your table with the tables drawn by some of your friends.

क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक Area is 36 square units.				
आयत Rectangle	लांबी Length	रुंदी Breadth	अर्धपरिमिती Semi-perimeter	परिमिती Perimeter
i				
ii				
...				

तक्ता 3
Table 3

उपकृती 2
Sub task 2

- तुमच्या चौकट-कागदावर क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक असलेले वेगवेगळे आयत काढा. (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).
Draw different rectangles which have an area of 17 square units. (Draw as many as you can.)
- दिलेल्या तक्त्यात माहिती भरा.
Fill the given table.
- तुम्हाला एखादा चौरस मिळाला का? _____
Did you get any square? _____
- तुमच्या तक्त्यातील माहिती आणि वर्गातील इतरांची माहिती यांच्यात तुलना करा.
Compare your table with the tables filled by some of your friends.

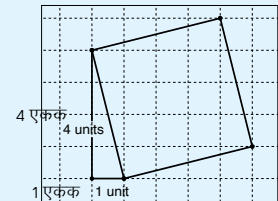
क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक Area is 17 square units.				
आयत Rectangle	लांबी Length	रुंदी Breadth	अर्धपरिमिती Semi-perimeter	परिमिती Perimeter
i				
ii				
...				

तक्ता 4
Table 4

17×1 किंवा 1×17 सारख्या स्वाभाविक आयतांशिवाय, ज्यांचे क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक आहे, असा आकृती T5 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एक तिरका आयतदेखील मिळू शकतो, जो चौरस आहे.

$$\text{चौरसाची बाजू} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

म्हणून, चौरसाचे क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक होईल.



आकृती T5
Figure T5

Apart from the standard rectangles like 17×1 or 1×17 , for area 17 square units, one can also get a tilted rectangle like the one given below.

$$\text{Side of the square} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

So, the area of the square is 17 square units.

उपकृती 3

Sub task 3

- क्षेत्रफळ 24 चौरस एकक असलेले वेगवेगळे आयत काढा. (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).
Draw different rectangles having an area of 24 square units. (Draw as many as you can.)
- वर दिल्याप्रमाणे एक तक्ता बनवा
Make a table like the one above.
- तुम्ही काढलेल्या आयतांमध्ये तुम्हाला कोणते तरी एकरूप आयत दिसतात का? _____
Do you see any congruent rectangles among the rectangles you have drawn? _____
- तुमच्या तक्त्यातील माहितीची तुलना वर्गातील इतरांच्या माहितीबरोबर करा.
Compare your table with tables filled by some of your friends.

6×4 , 8×3 , 12×2 , 24×1 सारख्या स्वाभाविक आयतांव्यतिरिक्त, 24 चौरस एकक क्षेत्रफळासाठी आकृती T6 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एक तिरका आयतदेखील मिळू शकतो. ABDC चौरस पहा. जर तुम्ही ABDC मधील चौरस एककांची संख्या मोजली, तर तुम्हाला 4 पूर्ण चौरस (ज्यांची बाजू एक एकक आहे) आणि 8 अर्धे चौरस (ज्यांची बाजू एक एकक आहे) मिळतील.

त्यामुळे चौरस ABDC चे क्षेत्रफळ $= (4 \times 1) + (8 \times 1/2) = 8$ चौरस एकक

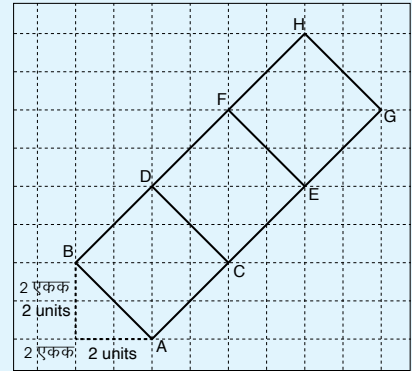
म्हणून, आयत ABHG चे क्षेत्रफळ $8 + 8 + 8 = 24$ चौरस एकक होईल.

Apart from the standard rectangles like 6×4 , 8×3 , 12×2 , 24×1 , for area 24 square units, one can also get a tilted rectangle like the one given in figure T6.

Look at the square ABDC. If you count the number of unit of squares inside ABDC, you will find that there are 4 full unit squares and 8 half unit squares. So the area of square ABDC = 8 sq. units. $(4 + (8 \times \frac{1}{2}))$

Hence, the area of the rectangle ABHG is

$$8 + 8 + 8 = 24 \text{ square units.}$$



आकृती T6
Figure T6



कृती 7: आता, समान क्षेत्रफळ आणि समान परिमिती असलेले आयत...?

Task 7: Next, rectangles with equal areas and equal perimeters...?

तुम्ही असे दोन वेगवेगळे आयत काढा की ज्यांची परिमिती 14 एकक आणि क्षेत्रफळ 12 चौरस एकक आहे? तुम्ही किती वेगवेगळे आयत काढले? तुम्ही काढलेल्या आयतांची तुलना इतरांनी काढलेल्या आयतांशी करा. ते आयत सारखे आहेत का?

Can you draw two different rectangles whose perimeter is 14 units and area is 12 area units? How many different rectangles did you get? Compare your rectangles with those drawn by your friends. Are they the same?

तुम्हाला वेगळे आयत मिळाले का? याचे उत्तर होय असल्यास, तुमचे उत्तर इतरांना आणि शिक्षकांना सांगा. असे शक्य नाही, असे तुम्हाला वाटल्यास, 'का नाही' असा विचार करा.

Did you get different rectangles? If yes, share your answer with your friends and your teacher. If you think it is not possible, think about why not?

ही कृती पूर्ण झाल्यानंतर, पुढील विधानांसाठी काही निष्कर्षांपर्यंत पोहोचण्याचा प्रयत्न करा (अशा स्वरूपाची आणखी विधाने तुमच्या विद्यार्थ्यांकडून येऊ शकतात).

After these tasks are completed, try to reach some conclusions for the following statements (More such statements can come from your students.)

- हे शक्य आहे की जरी आयताचे क्षेत्रफळ वाढले, तरी परिमिती कमी होते.
It is possible that even if the area of a rectangle increases, the perimeter decreases.
- हे शक्य आहे की जरी आयताची परिमिती वाढली, तरी क्षेत्रफळ कमी होते.
It is possible that even if the perimeter of a rectangle increases, the area decreases.
- असे आयत असतात जे एकरूप नसतात, परंतु त्यांचे क्षेत्रफळ समान किंवा परिमिती समान असते.
There are rectangles which are not congruent but have the same area or the same perimeter.
- आयताचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात कोणताही थेट संबंध नसतो.
There is no obvious relationship between the area and perimeter of a rectangle.
- जर दोन आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती दोन्ही समान असतील तर ते आयत एकरूप असतात.
If for two rectangles, the area and the perimeter are both equal, then the rectangles are congruent.

साध्य : जर दोन आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती दोन्ही समान असतील तर ते आयत एकरूप असतात.

Claim: If for two rectangles, the area and the perimeter are both equal, then the rectangles are congruent.

सिद्धता :

Proof:

दिलेले आहे: आयत 1 आणि आयत 2 यांचे क्षेत्रफळ समान आणि परिमिती समान आहे.

l_1 व b_1 ही पहिल्या आयताची अनुक्रमे लांबी आणि रुंदी आहे आणि l_2 व b_2 ही दुसऱ्या आयताची अनुक्रमे लांबी आणि रुंदी आहे.

दोन्ही आयतांचे क्षेत्रफळ समान आहे, हे दिले आहे.

Given that: Rectangle 1 and 2 have the same area and the same perimeter.

Let l_1 and b_1 be the length and the breadth of the first rectangle, respectively, and l_2 and b_2 be the length and the breadth of the second rectangle, respectively.

Given that the area of the two rectangles are equal.

$$\text{तर, } l_1 \times b_1 = l_2 \times b_2 \dots\dots\dots (I)$$

$$\text{आणि } 2(l_1 + b_1) = 2(l_2 + b_2)$$

$$l_1 + b_1 = l_2 + b_2 \dots\dots\dots (II)$$

(I) आणि (II) वरून आपल्याकडे

$$l_1 = l_2 + b_2 - b_1 \dots\dots\dots (III) \text{ आहे}$$

त्यामुळे (I) मध्ये (III) बदलणे,

$$(l_2 + b_2 - b_1) \times b_1 = l_2 \times b_2$$

$$\text{तर, } l_2 b_1 + b_1 b_2 - b_1^2 = l_2 b_2$$

$$b_1 b_2 - b_1^2 = l_2 b_2 - l_2 b_1$$

$$\text{म्हणून, } b_1(b_2 - b_1) = l_2(b_2 - b_1).$$

$$\text{म्हणून, } (b_1 - l_2) \times (b_2 - b_1) = 0.$$

तर, एकतर $b_2 = b_1$ किंवा $l_2 = b_1$. जर $b_2 = b_1$, तर $l_2 = l_1$,

(I) वरून. जर $l_2 = b_1$, तर $l_1 = b_2$, from (I) वरून.

$$\text{So, } l_1 \times b_1 = l_2 \times b_2 \dots\dots\dots (I)$$

$$\text{and } 2(l_1 + b_1) = 2(l_2 + b_2)$$

$$l_1 + b_1 = l_2 + b_2 \dots\dots\dots (II)$$

From (I) and (II) we have,

$$l_1 = l_2 + b_2 - b_1 \dots\dots\dots (III)$$

So substituting (III) in (I),

$$(l_2 + b_2 - b_1) \times b_1 = l_2 \times b_2$$

$$\text{So, } l_2 b_1 + b_1 b_2 - b_1^2 = l_2 b_2$$

$$b_1 b_2 - b_1^2 = l_2 b_2 - l_2 b_1$$

$$\text{Therefore, } b_1(b_2 - b_1) = l_2(b_2 - b_1).$$

$$\text{Hence, } (b_1 - l_2) \times (b_2 - b_1) = 0.$$

So, either $b_2 = b_1$ or $l_2 = b_1$. If $b_2 = b_1$, then $l_2 = l_1$,

from (I). If $l_2 = b_1$, then $l_1 = b_2$, from (I) above.

वरील दोन्ही पर्यायांमध्ये, दोन्ही आयत एकरूप आहेत कारण त्यांच्या लगतच्या बाजू समान आहेत आणि सर्व कोन समान आहेत.

In either case, the two rectangles are congruent as there are corresponding sides that are equal and all the angles are equal.

विद्यार्थ्यांना पुढील प्रश्नांची उत्तरे चौकट कागदावर शोधू द्या. तुम्ही त्यांना असेच आणखी आकृतिबंध शोधायला सांगू शकता.

Let the students explore the following questions, on a grid paper. You can also ask them to check for more such patterns.



कृती 8: चौकटीबरोबर आणखी काही...!

Task 8: More with the grid...!

लक्षात ठेवा, तुम्ही काढलेल्या सर्व आकृत्यांचे सर्व शिरोबिंदू हे चौकट-बिंदूवर असले पाहिजेत. चौकट-कागदाचा वापर करा आणि पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा.

Remember that all the vertices of all the figures that you draw should be grid points. Use the grid paper, explore and find answers to the following:

- जर आयताची लांबी आणि रुंदी या नैसर्गिक संख्या असतील, आणि त्याचे क्षेत्रफळ ही विषम संख्या असेल, तर त्या आयताच्या अर्धपरिमितिसंबंधी तुम्ही काय सांगाल?

If the length and the breadth of a rectangle are natural numbers, and its area is an odd number, what can you say about that rectangle's semi-perimeter (half of the perimeter)?

जर क्षेत्रफळ विषम संख्या असेल, तर याचा अर्थ लांबी आणि रुंदी दोन्ही विषम आहेत. आणि म्हणून त्यांची बेरीज म्हणजेच अर्धपरिमिती सम संख्या असेल.

If the area is odd, it means that the length and the breadth are both odd. And hence their sum, which is the semi-perimeter, is even.

- जर आयताची लांबी आणि रुंदी या नैसर्गिक संख्या असतील, आणि त्याची अर्धपरिमिती ही विषम संख्या असेल, तर त्या आयताच्या क्षेत्रफळासंबंधी तुम्ही काय सांगाल?

If the length and the breadth of a rectangle are natural numbers, and its semi-perimeter is an odd number, what can you say about the area of this rectangle?

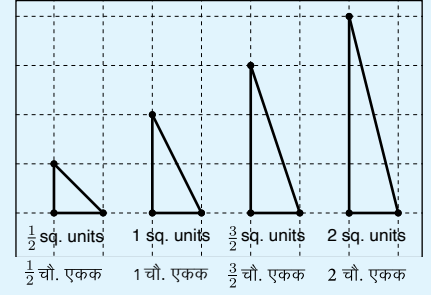
जर अर्धपरिमिती विषम असेल, तर याचा अर्थ एकतर लांबी विषम संख्या असेल किंवा रुंदी विषम संख्या असेल, आणि दुसरी संख्या सम असेल. म्हणूनच त्यांचा गुणाकार म्हणजे क्षेत्रफळ सम संख्या असेल.

If the semi-perimeter is odd, it means that either the length is an odd number or the breadth is an odd number, and the other is even. And hence their product, which is the area, is even.

- चौकट-कागदावर काढलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे काय-काय असू शकतात? आपल्याला अर्ध्याच्या सर्व पटी मिळाल्या आहेत का? What are the different possible areas of triangles drawn on the grid? Are all the multiples of half achieved?

अर्धा चौरस एककाच्या पटीतील सर्व क्षेत्रफळे मिळू शकतात. उदाहरणार्थ, आकृती T7 मध्ये दिलेले त्रिकोण पहा. जर तुम्ही ही प्रक्रिया चालू ठेवली, तर तुम्हाला अर्ध्याचे कोणतेही गुणक मिळू शकतात.

All the multiples of half can be achieved. For example, look at the triangles given in figure T7. If you continue this process then you can get any multiple of half.



आकृती T7
Figure T7

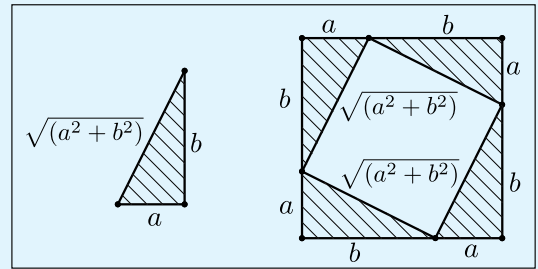
4. चौकट-कागदावर काढलेल्या चौरसांचे क्षेत्रफळ काय असू शकते? (चौरसांची बाजू पूर्णांक संख्या असतील, असे नाही)
What are the possible areas of grid squares (squares with vertices on the grid)? (These may not have integer sides!)

विद्यार्थ्यांना हे स्पष्ट असेल, की पूर्ण वर्ग संख्येसाठी ते असा एक चौरस काढू शकतात ज्याचे क्षेत्रफळ त्या संख्येइतकेच आहे (चौरसाची बाजू ही पूर्ण वर्ग संख्येच्या वर्गमूळाएवढी आहे). इतर काही शक्यता आहेत का, ते विद्यार्थ्यांना विचारा. इतर शक्यता शोधण्यासाठी कदाचित तुम्हाला त्यांना सूचनिका (hints) द्याव्या लागतील. उदाहरणार्थ,

I: a आणि b एकक बाजू असलेला काटकोन त्रिकोण घ्या (आकृती T8 पहा), तर कर्णाची लांबी $\sqrt{a^2 + b^2}$ एकक आहे.

It will be obvious to the students, that for a perfect square number one can always draw a square whose area is equal to that perfect square (side is equal to the square root). Ask the students if there are any other possibilities. You might have to give them hints to start looking at other possibilities. For example,

I: Consider a right-angled triangle of sides a units and b units (see figure T8), then the length of the hypotenuse is $\sqrt{a^2 + b^2}$ units.



आकृती T8
Figure T8

जर तुम्ही बाजू $a+b$ एकक असलेला चौरस आकृती T8 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे काढला तर आंतर-चौरसाची बाजू $\sqrt{a^2 + b^2}$ एकक असेल. म्हणून आंतर-चौरसाचे क्षेत्रफळ $a^2 + b^2$ चौरस एकक होईल.

If you draw a square of side $a + b$ units in such a way then, the side of the inscribed square is $\sqrt{a^2 + b^2}$ units. So, the area of the inscribed square is $a^2 + b^2$ sq. units.

महत्त्वाचे म्हणजे चौकट-कागदावरील कोणत्याही तिरक्या चौरसाची बाजू दोन वर्गांच्या बेरजेचे वर्गमूळ म्हणून लिहिता येईल. उदाहरणार्थ, $\sqrt{a^2 + b^2}$

More importantly, the side of any grid square can be written as a square root of the sum of two squares, for example $\sqrt{a^2 + b^2}$.

II. तसेच आकृती T9 (A) प्रमाणे कोणताही तिरका चौरस घेतल्यास त्या चौरसाची बाजू $\sqrt{a^2 + b^2}$ एककाच्या रूपात असते (आकृती T9 (B) पहा).

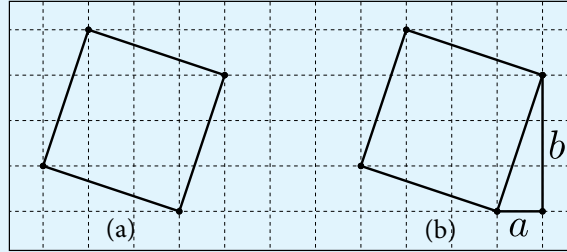
येथे हे स्पष्ट आहे की दिलेल्या चौरसाच्या बाजूची लांबी $\sqrt{a^2 + b^2}$ एवढी आहे

II. Also given any tilted square like the one in figure T9 (a), it can be seen that the side of that square is of the form, $\sqrt{a^2 + b^2}$ units (see figure T9 (b)).

Here it is clear, that the length of the side of the given square is equal to $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(I) आणि (II) वरून, हे स्पष्ट होते की, दोन वर्गसंख्यांची बेरीज म्हणून लिहिता येणाऱ्या कोणत्याही संख्येसाठी एक चौरस काढता येईल, ज्याचे क्षेत्रफल ती संख्या असेल.

From (I) and (II), it is clear that, for any number which can be written as the sum of two squares, one can draw a square whose area would be that number.



आकृती T9
Figure T9

5. तुम्ही काढलेल्या तिरक्या आयतांची क्षेत्रफळे काय असू शकतात? (टीप: आधी काढलेले तिरके चौरस पहा).

What are the possible areas of tilted rectangles (rectangles with vertices on the grid)? (Hint: Look at the tilted squares first).



अधिक वाचनासाठी / संदर्भ Suggested Readings / Resources

- An interesting exploration of area and perimeter of triangles:
 - De, P., Sircar, S., Titus, S. (2017). LFHC - Area, perimeter and congruency (APC). At Right Angles (November 2017), Azim Premji Foundation. <https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-november-2017-LFHC-area-perimeter-congruency.aspx>
- A book which talks about Pedagogical Content Knowledge:
 - Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Chapter 4. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- A presentation on mathematical proofs and examples of proofs:
 - <https://study.com/academy/lesson/mathematical-proof-definition-examples-quiz.html>
- A short course on mathematical languages and language of proofs:
 - <https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college-stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf>

संदर्भ References

- De, P., Sircar, S., & Titus, S. (2017) November. LFHC - Area, perimeter and congruency (APC). At Right Angles, 6 (3), 53-58. Azim Premji Foundation. Retrieved from <https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-november-2017-LFHC-area-perimeter-congruency.aspx>
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.