

## 8.14

तुमची आणि माझी बहुभुजाकृती एकसारखीच आहे का?  
Is your polygon the same as mine?

**Main Author:** Aaloka Kanhere, Shweta Naik

**Contributing Author:** Harita Raval, Tuba Khan

**Reviewers:** Amber Habib, Amol Dighe, H.C. Pradhan, Jonaki Ghosh, Sneha Titus

**English Editors:** Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam

**Marathi Translator:** Pranali Parab, Nilkantha Gholap

**Marathi Editors:** Deepa Chari, Vijay D. Lale

**Marathi Editorial Assistance:** Aaloka Kanhere, Sushma Rawool, Nilkantha Gholap

**Creative Commons License:** CC BY-SA 4.0 International, HBCSE

## 8.14. तुमची आणि माझी बहुभुजाकृती एकसारखीच आहे का?

### Is your polygon the same as mine?

#### आढावा Overview

या अध्ययन घटकामध्ये, विद्यार्थी एकमेव (unique) त्रिकोण, चौकोन आणि इतर बहुभुजाकृती तयार करण्यासाठी आवश्यक असलेल्या किमान अटीचा शोध घेतील. हे अध्ययन घटक करताना विद्यार्थी स्वतःहून समजून घेतील की एकमेव बहुभुजाकृती काढताना लागणाऱ्या अटी आणि त्यांनी शिकलेल्या एकरूपतेच्या कसोट्या सारख्याच असतात.

In this Learning Unit, students will explore the minimum conditions needed to construct a unique triangle, quadrilateral, and other polygons. The objective of this Learning Unit is for the students to realize for themselves that the conditions which enable drawing a unique polygon are the same as the conditions of congruency that they have studied.

#### अध्ययन घटकाची उद्दिष्टे Unit-specific objectives

- एकरूपता आणि एकमेव त्रिकोणांची संरचना यांच्यातील संबंध प्रस्थापित करणे  
To establish a connection between congruence and the construction of unique triangles
- त्रिकोण, चौकोन आणि इतर बहुभुजाकृती यांची एकरूपता निश्चित करण्यासाठी किमान अटींची संख्या शोधणे  
To find the number of conditions necessary to ensure congruence of triangles, quadrilaterals, and other polygons
- काही विशिष्ट अटी एकरूपतेच्या कसोट्या का नसतात, ते समजून घेणे  
To understand why certain sets of conditions are not criteria for congruence



#### किमान आवश्यक वेळ Minimum time required

40 मिनिटांची पाच सत्रे  
five sessions of 40 minutes each

त्रिकोणांच्या कृती (कृती 1 ते 5) – 40 मिनिटांची दोन सत्रे  
Triangle activity (Tasks 1 to 5)– Two sessions of 40 minutes each

चौकोनांच्या कृती (कृती 6) – 40 मिनिटांची दोन सत्रे  
Quadrilateral activity (Task 6)– Two sessions of 40 minutes each

इतर बहुभुजाकृतीसाठीच्या कृती (कृती 7 ते 9) – 40 मिनिटांचे एक सत्र  
Extension to other polygons (Tasks 7 to 9)– One session of 40 minutes



#### अध्ययन घटकाचा प्रकार Type of learning unit

वर्गात  
Classroom

## अभ्यासक्रमाशी दुवा Links to curriculum

NCERT Class 7 Mathematics	NCERT Class 8 Mathematics	NCERT Class 9 Mathematics
<b>Chapter 7</b> : Congruence of triangles (Feb 2007) <b>Chapter 10</b> : Practical Geometry (Feb 2007)	<b>Chapter 4</b> : Practical Geometry (Jan 2008)	<b>Chapter 7</b> : Triangles (Feb 2006)

तक्ता T1

Table T1

## पूर्वज्ञान Prerequisites

विद्यार्थ्यांना पुढील गोष्टी माहीत असणे आवश्यक आहे :

Students should be familiar with:

- मोजपट्टी आणि कंपास यांसारख्या भौमितिक साधनांचा वापर  
Use of geometric tools like scale and compass
- त्रिकोण आणि चौकोन यांची मूलभूत संरचना  
Basic construction of triangles and quadrilaterals

## ओळख Introduction

तुम्ही फोनवर बोलताना एखाद्या व्यक्तीशी तुमच्या मनातील त्रिकोणाचे वर्णन कसे कराल, याचा विचार कधी केला आहे का? तुम्ही काय सांगाल? तुम्ही बाजूबद्दल सांगाल की कोनाबद्दल सांगाल? आणि तुमच्या मनामध्ये जशी आकृती आहे, अगदी तशी आकृती ती व्यक्ती काढू शकेल का? याउपर, कमीतकमी माहिती सांगून हे तुम्ही कसे करू शकता? आज आपण या सर्व प्रश्नांची उत्तरे काही उदाहरणे शोधून, निरीक्षणे करून आणि ती निरीक्षणे पडताळून किंवा त्यांचे निराकरण करून शोधणार आहोत.

Have you ever wondered how you would describe a triangle that is in your mind to somebody over the phone? What do you really say? Do you mention the sides or the angles? And would that person get the exact same figure that you had in mind? Moreover, how can you do this by giving minimum information? Today we will try to answer these questions by investigating some examples, making observations, and verifying or refuting these observations.



## कृती 1: शब्दांपासून रेखाचित्रांपर्यंत Task 1: From words to drawings

प्रश्न 1: तुम्हाला दिलेल्या कोऱ्या कागदावर तुमच्या आवडीचा त्रिकोण काढा. त्रिकोणाची लांबी तसेच कोन मोजा आणि त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या.

Q1. Draw a triangle of your choice on the given blank sheet of paper. Measure the sides and the angles of the triangle, and label the vertices of the triangle.

विद्यार्थ्यांनी ही कृती सुरू करण्याआधी, ते जोडीने बसलेले आहेत, याची खात्री करून घ्या.  
Before the students begin working on this activity, make sure they are sitting in pairs.



### साहित्य Materials

कोरे कागद, पेन्सिल, खोडरबर, कंपास पेटी (भूमिती कंपास, गुण्या (समकोनमापी), कोनमापक आणि मोजपट्टी), कात्री.

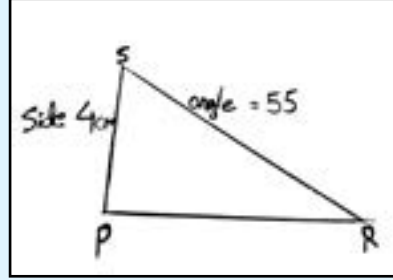
Blank sheets, pencil, erasers, Geometry boxes (Geometry compass, set-squares, protractor, and scale), scissors.

प्रत्येक कृतीमध्ये एका विद्यार्थ्याने दुसऱ्या विद्यार्थ्याबरोबर चर्चा करणे आवश्यक आहे. म्हणूनच या घटकात सहसा या विद्यार्थ्यांना जोडीदार म्हणून संबोधले आहे. सर्व विद्यार्थ्यांजवळ आवश्यक साहित्य असल्याची किंवा प्रत्येक जोडीकडे किमान मोजपट्टी, कोनमापक आणि कंपास यांचा एक संच असल्याची खात्री करा.

Each task requires discussing with another student, and in this unit, we often refer to these students in pairs as partners. Make sure they all have required materials or at least that every pair has one set of scale and compass.

या कृतीमुळे विद्यार्थी त्रिकोण काढू शकतात की नाही, बाजू आणि कोन मोजू शकतात की नाही, तसेच त्यांना त्रिकोणाला नावे कशी देतात हे माहित आहे की नाही, हे पाहण्याची संधी मिळेल. जेव्हा आम्ही इयत्ता 8 वीच्या विद्यार्थ्याबरोबर ही कृती केली तेव्हा एका विद्यार्थ्याने शिरोबिंदूऐवजी एका बाजूस त्रिकोणाच्या कोनाचे माप लिहिले. उदाहरणासाठी आकृती T1 पहा.

This activity will give you a chance to see whether students can draw triangles, measure sides and angles, and also, whether they know how to label a triangle. See Figure T1 for an example of a student writing the angle of a triangle adjacent to a side instead of a vertex when we conducted this activity with Class 8 students.



आकृती T1 त्रिकोणाला नाव देण्याची एका विद्यार्थ्याची पद्धत  
Figure T1 A case of student's way of labelling a triangle

प्रश्न 2: आता, तुमच्या मित्रमैत्रिणींनी काढलेले त्रिकोण पहा. त्यात तुम्हाला काही विशेष दिसले का? ते काय आहे?

Q2. Now see the triangles drawn by your friends. Do you see anything interesting? What is it?

तुम्ही ज्या कागदावर त्रिकोण काढलेला आहे, तो कागद नीट जपून ठेवा; नंतर या कृतीकडे आपण पुन्हा येणार आहोत.

Keep the paper on which you drew your triangle safely aside; we will be coming back to this triangle later in the activity.



## कृती 2: फक्त एक माप दिले असता त्रिकोणाची रचना करणे

### Task 2: Constructing a triangle when only one measure is given

कृती 2 अ : फक्त एक बाजू दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे

### Task 2a: Constructing a triangle when only one side is given

दिलेल्या कोऱ्या कागदावर एक असा त्रिकोण काढा की ज्याच्या एका बाजूची लांबी 6 सेंमी. आहे. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या. आता, इतरांनी काढलेल्या त्रिकोणांचा अभ्यास करा.

Draw a triangle on the given paper, such that one of its sides is 6 cm. Label the vertices of your triangle. Now study the triangle drawn by others.

विद्यार्थी येथे त्रिकोणाच्या सर्व बाजू 6 सेंमी. आहेत का, असा एक प्रश्न विचारू शकतात आणि या प्रश्नाचे उत्तर 'नाही' असे द्या. येथे विद्यार्थ्यांनी समभुज त्रिकोण काढू नयेत, असे अपेक्षित आहे. तुम्ही त्यांना असे सांगू शकता, 'त्रिकोणाच्या बाजूंपैकी फक्त एकच बाजू 6 सेंमी. आहे आणि सर्व बाजू नाहीत.'

Students might ask a question, whether all the sides of the triangle are 6 cm, and a productive answer to this question is to say “No”. For the purpose of our activity, it is best not to get equilateral triangles. You can respond to them as, “One of the sides of the triangle is 6 cm, and not all”.

आता, तुमच्या गटातील इतरांनी काढलेल्या त्रिकोणाचा अभ्यास करा.

Now study the triangle drawn by your group members.

प्रश्न 1: तुम्ही काढलेला त्रिकोण आणि इतरांनी काढलेले त्रिकोण सारखेच आहेत का?

Q1. Is your triangle the same as others?

प्रश्न 2: तुम्ही या दोन त्रिकोणांची तुलना कशी केली?

Q2. How did you compare these two triangles?

प्रश्न 3: तुम्ही आणि तुमचे मित्रमैत्रीण, दोघांनाही असे त्रिकोण काढायला सांगितले होते, ज्यांची एक बाजू 6 सेंमी. आहे. तुम्ही काढलेले त्रिकोण एकसारखेच आहेत का? आणि का?

Q3. You and your friend, both were told that one side of the triangle is 6 cm. Did you both get exactly the same triangles? Why?

यावेळी तुम्ही काही तोंडी उत्तरे मिळवायचा प्रयत्न करा. विद्यार्थ्यांनी त्रिकोणांची तुलना करण्यासाठी कोणकोणते विविध निकष वापरले, हे विद्यार्थी येथे सांगू शकतात; जसे बाजूंची लांबी किंवा कोनांचे माप इ. जेव्हा तुम्ही वर्गात फिराल तेव्हा अशा विद्यार्थ्यांच्या जोड्या पहा, ज्यांचे त्रिकोण स्पष्टपणे वेगळे आहेत. अशा वेळी त्यांना बाजू किंवा कोन मोजण्याची आवश्यकता आहे का किंवा ते इतर काही पद्धतींनी त्रिकोणांतील फरक ठरवू शकतात असे त्या विद्यार्थ्यांना विचारा.

Make sure that you collect some oral responses here. The students can give various criteria that they used to compare the triangles; like lengths of sides or measure of the angles. When you move around, check if there are pairs of students whose triangles are obviously different. Ask these students whether for such cases they need to measure the sides or angles or they can decide using some other ways.

काही बाबतीत, ज्या दोन त्रिकोणांची तुलना केली जाते, ते स्पष्टपणे वेगळे दिसतील. इतर काही बाबतीत, बाजू किंवा कोन मोजण्याची गरज पडू शकते. तुलना करण्याचा आणखी एक मार्ग म्हणजे दोन त्रिकोण कापून एकावर एक ठेवणे, किंवा त्रिकोण काढलेले कागद एकावर एक ठेवून प्रकाशासमोर धरून पाहणे. शिक्षक या संधीचा वापर करून दाखवू शकतात की जेव्हा त्रिकोण एकसारखे असतात (म्हणजे संगत बाजू आणि संगत कोन एकाच मापाचे असतात किंवा एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात), तेव्हा ते त्रिकोण एकरूप असतात.

In some cases, the two triangles being compared may look obviously different. In some other cases, one may need to check by measuring the sides and/or the angles. Another way to compare is to superimpose the two triangles, by cutting them out, or by holding the sheets of paper against a bright light. Teachers may use the opportunity to point out that when the triangles are the same (i.e., have corresponding sides and angles of the same measure or overlap exactly), then we say that the triangles are congruent.

## कृती 2 ब : फक्त एक कोन दिला असता त्रिकोणाची रचना करणे

### Task 2b: Constructing a triangle when only one angle is given

दिलेल्या कोऱ्या कागदावर एक असा त्रिकोण काढा की ज्याच्या एका कोनाचे माप  $55^\circ$  आहे. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या. आता इतरांनी काढलेला त्रिकोण पहा.

Draw a triangle on the given paper where one of the angles measures  $55^\circ$ . Name your triangle. Now study the triangle drawn by others.

विद्यार्थ्यांना इतर कोनांची मापे जाणून घेण्यात रस असू शकतो. विद्यार्थ्यांना पुन्हा सांगा की फक्त एकाच कोनाचे माप सांगितले आहे. त्रिकोणाचे गुणधर्म आणि दोन कोन दिल्यास, तिसरा कोन नेहमी कसा शोधता येईल, याची उजळणी करण्यासाठी या संधीचा वापर करा.

Students might want to know the measures of the other angles. Reiterate that only one angle has been specified. Use this opportunity to revise the properties of triangles, and how, given two angles, one can always find the third angle.

प्रश्न 1: तुम्ही काढलेला त्रिकोण आणि इतरांनी काढलेले त्रिकोण सारखेच आहेत का?

Q1. Is your triangle the same as others?

प्रश्न 2: तुम्ही या दोन त्रिकोणांमध्ये कशी तुलना केली?

Q2. How did you compare these two triangles?

प्रश्न 3: तुम्ही आणि तुमचे मित्रमैत्रीण, यांना असा एक त्रिकोण काढायला सांगितला होता, ज्या त्रिकोणाचा एक कोन  $55^\circ$  आहे. तुम्ही दोघांनी काढलेले त्रिकोण एकसारखेच आहेत का? आणि का?

Q3. You and your friend, both were given one angle of  $55^\circ$ . Did you both get exactly the same triangles? Why?



### कृती 3: दोन मापे दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे

#### Task 3: Constructing a triangle when two measures are given

आपापसांत तीन गट बनवा. शक्य असेल तर जे तुमच्या आजूबाजूला बसतात त्यांना तुमच्या गटात घ्या. या गटांना A, B आणि C अशी नावे द्या. Make three groups among yourselves. If possible, form your group with your classmates who are sitting close to you. Let us call these groups A, B and C.

अ गटाला दोन बाजूंची मापे सांगा, ब गटाला एका बाजूचे आणि एका कोनाचे माप सांगा आणि क गटाला दोन कोनांची मापे सांगा.

Give Group A the measure of two sides, Group B the measure of one side and one angle, and Group C the measure of two angles.

गट A: असा त्रिकोण काढा ज्याच्या बाजू 7 सेंमी. आणि 5 सेंमी. आहेत. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या.

Group A: Draw a triangle whose sides are 7 cm and 5 cm. Label the vertices of your triangle.

गट B: असा त्रिकोण काढा ज्याची एक बाजू 6 सेंमी. आणि एक कोन  $55^\circ$  आहे. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या.

Group B: Draw a triangle whose one side is 6 cm and one angle is  $55^\circ$ . Label the vertices of your triangle.

गट C: असा त्रिकोण काढा ज्याच्या दोन कोनांची मापे  $50^\circ$  आणि  $75^\circ$  आहेत. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या.

Group C: Draw a triangle whose two angles are  $50^\circ$  and  $75^\circ$ . Label the vertices of your triangle.

आता, तुमच्या गटातील इतरांनी काढलेल्या त्रिकोणाचा अभ्यास करा.

Now study the triangle drawn by your group members.

प्रश्न 1: तुमच्या गटातील सर्वच त्रिकोण सारखे आहेत का?

Q1. Are all triangles in your group the same?

प्रश्न 2: या दोन्ही त्रिकोणांमध्ये तुलना तुम्ही कशी केली?

Q2. How did you compare these two triangles?

गट A, B आणि C:

प्रश्न 3. तुमच्यापैकी प्रत्येकाला तुमच्या गटातील सदस्यांसारखेच त्रिकोण मिळाले आहेत का? आणि का?

Groups A, B and C:

Q3. Did each of you get exactly the same triangles as the members in your group? Why?

बहुधा आधी सांगितल्याप्रमाणे, विद्यार्थी त्यांच्या दोन्ही त्रिकोणांच्या बाजू आणि कोन मोजून त्रिकोण समान आहेत की नाहीत, हे पडताळून पाहतील. मिळालेले त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप आहेत की नाही हे पाहण्यासाठी शिक्षक दोन्ही त्रिकोण कापून एकमेकांवर ठेऊन पाहायला सांगू शकतात. कृती 2 आणि 3 नंतर विद्यार्थ्यांशी चर्चा करा की केवळ एक किंवा दोन अटींवरून एकसारखे त्रिकोण मिळत नाहीत.

Students most probably will verify whether the two triangles are the same or not by measuring the sides and angles of their triangles, as mentioned earlier. The teacher can also suggest superimposing (cutting the two triangles and placing on each other to see whether they overlap each other exactly), to see whether the triangles obtained are congruent to each other.



### कृती 4: तीन मापे दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे

#### Task 4: Constructing a triangle when three measures are given

वर्ग आधीच तीन गटांमध्ये विभागलेला आहे. आता प्रत्येक गटाचे दोन भाग (म्हणजे दोन उपगट) करा : A1 आणि A2, B1 आणि B2 आणि C1 आणि C2. एकमेकांच्या शेजारी बसलेले कोणतेही दोन विद्यार्थी एकाच गटात असल्याची खात्री करा.

The class is already divided into 3 groups. Now divide each group into 2 sub-groups. A1 & A2, B1 & B2 and C1 & C2. Make sure that any two students sitting beside each other are part of the same group.

तुमचा वर्ग आधीच तीन गटांमध्ये विभागलेला आहे. आता प्रत्येक गटाचे दोन भाग (म्हणजे दोन उपगट) करा: A1 आणि A2, B1 आणि B2 आणि C1 आणि C2.

Your class is already divided into 3 groups. Now divide each group into 2 sub-groups. A1 & A2, B1 & B2 and C1 & C2.

गट A1: त्रिकोण XYZ असा काढा की  $XY = 4$  सेंमी.,  $YZ = 6$  सेंमी., आणि  $XZ = 7$  सेंमी.

Group A1: Draw a triangle XYZ such that  $XY = 4$  cm,  $YZ = 6$  cm, and  $XZ = 7$  cm.

गट A2: त्रिकोण ABC असा काढा की  $AB = 4$  सेंमी.,  $AC = 3$  सेंमी., आणि  $\angle C = 45^\circ$ .

Group A2: Draw a triangle ABC such that,  $AB = 4$  cm,  $AC = 3$  cm, and  $\angle C = 45^\circ$ .

गट B1: त्रिकोण IJK असा काढा की  $\angle IJK = 40^\circ$ ,  $\angle JKI = 65^\circ$ , आणि  $\angle KIJ = 75^\circ$ .

Group B1: Draw a triangle IJK such that  $\angle IJK = 40^\circ$ ,  $\angle JKI = 65^\circ$ , and  $\angle KIJ = 75^\circ$ .

गट B2: त्रिकोण STU असा काढा की  $\angle UST = 50^\circ$ ,  $ST = 3$  सेंमी. आणि  $\angle STU = 65^\circ$ .

Group B2: Draw a triangle STU such that  $\angle UST = 50^\circ$ ,  $ST = 3$  cm, and  $\angle STU = 65^\circ$ .

गट C1: त्रिकोण EFG असा काढा की  $EF = 7$  सेंमी.,  $FG = 9$  सेंमी., आणि  $\angle GEF = 90^\circ$ .

Group C1: Draw a triangle EFG such that  $EF = 7$  cm,  $FG = 9$  cm, and  $\angle GEF = 90^\circ$ .

गट C2: त्रिकोण PQR असा काढा की  $PQ = 5$  सेंमी.,  $\angle PQR = 50^\circ$ , आणि  $QR = 4$  सेंमी.

Group C2: Draw a triangle PQR such that  $PQ = 5$  cm,  $\angle PQR = 50^\circ$ , and  $QR = 4$  cm.

दिलेल्या सूचनांप्रमाणे विद्यार्थ्यांच्या गटांना त्रिकोण काढायला सांगा. विद्यार्थ्यांनी सुरु करण्याआधी, कोणत्या उपगटांमध्ये काढलेले त्रिकोण एकसारखे असतील आणि कोणत्या उपगटांमध्ये त्रिकोण एकमेकांपेक्षा वेगळे असतील, याचा त्यांना अंदाज करायला सांगा. लक्षात घ्या, गट A2 मधील विद्यार्थ्यांना वेगवेगळे त्रिकोण मिळायला हवेत (कारण हे त्रिकोण बा-बा-को (SSA) अटीनुसार आहेत, जी एकरूपतेची कसोटी नाही) आणि त्याचप्रमाणे गट B1 मधील विद्यार्थ्यांना वेगवेगळे त्रिकोण मिळायला हवेत (यात को-को-को (AAA) कसोटी आहे). या उप-गटांमधील प्रत्येकाचे त्रिकोण सारखेच असतील तर विद्यार्थ्यांना — दिलेल्या अटी पूर्ण झाल्या तरीही त्रिकोण

एकरूप असण्याची गरज नाही — हे शोधण्यासाठी प्रोत्साहित करा. A2 गटाची स्थिती खास आहे (बा-बा-को, SSA) असे म्हणता येईल, कारण ही अट पूर्ण करणारे फक्त दोन संभाव्य त्रिकोण आहेत (आकृती T2 पहा). A2 आणि B1 गटातील विद्यार्थ्यांच्या लक्षात येईल की त्यांना दिलेल्या अटी बिगर-एकरूपतेच्या आहेत. त्यानंतर, तुम्ही A2 आणि C1 (दोन्ही SSA) गटांच्या अटी सारख्याच आहेत, याकडे लक्ष वेधा. विद्यार्थ्यांना विचारा की C1 मध्ये दिलेली अट एकरूपता दाखवेल का? त्यामागील कारण विचारा.

Ask the groups to construct triangles as given in the instructions. Before they start, ask them to predict in which sub-groups would the triangles drawn be identical to one another, and in which sub-groups would the triangles be different from one another. Remember, students in group A2 should get different triangles (because this corresponds to the SSA condition, which is not a condition for congruence) and so should students in group B1 (which has the AAA condition). If everybody's triangles in these sub-groups are the same, encourage students to discover that the triangles need not be congruent even if they fulfil given conditions. The A2 group's condition (SSA) is especially interesting because there are only two possible triangles that fulfil this condition (see figure T2.) The students in groups A2 and B1 will discover that the conditions given to them were non-congruence conditions. Following this, you may point out the similarity between the conditions in A2 and C1 (both are SSA). Ask the students if the condition given in C1 is a congruence condition. Ask them to explain why.

आता, तुमच्या गटातील इतरांनी काढलेल्या त्रिकोणांचा अभ्यास करा.

Now study the triangle drawn by your group members.

प्रश्न 1: तुमच्या गटात काढलेले सर्वच त्रिकोण सारखेच आहेत का?

Q1. Are all triangles in your group the same?

---

---

प्रश्न 2: तुम्ही या दोन त्रिकोणांची तुलना कशी केली?

Q2. How did you compare these two triangles?

---

---



## कृती 5: एकमेव त्रिकोणाची रचना करण्यासाठी किमान अटी

### Task 5: Minimum conditions for the construction of a unique triangle

प्रश्न 1: कृती 1 मध्ये तुम्ही जो त्रिकोण काढला आहे, अगदी तसाच त्रिकोण इतरांनी काढावा, असे तुम्हाला वाटत असेल, तर कमीतकमी कोणती माहिती तुम्हाला द्यावी लागेल?

Q1. If you want others to construct exactly the same triangle like the one you drew in Task 1, what minimum information will you have to provide?

---

---

प्रश्न 2: हुबेहूब त्रिकोण काढण्यासाठी किमान कोणती माहिती देता येईल? याबाबत उपयोगी ठरेल, अशा सर्व माहितीचा उल्लेख करण्याचा प्रयत्न करा.

Q2. Are there other sets of minimum information that could be provided to construct the exact same triangle? Try and mention all such different sets of information that would work.

---

---

विद्यार्थ्यांना सर्व प्रकारची संभाव्य अनुमाने मांडू द्या. यात विद्यार्थी सामान्यपणे हे अनुमान मांडतात : सर्व तीन कोन आणि तीन बाजू सांगा. याला उत्तर देताना तुम्ही त्यांना आठवण करून देऊ शकता की त्यांना माहितीचा किमान संच शोधायचा आहे. त्यांनी नुकत्याच सांगितलेल्या सहा अटी म्हणजे खूप जास्त माहिती आहे. तसेच तीन बाजू आणि दोन कोन सांगणे, हे तीन बाजू आणि तीन कोन सांगण्यासारखेच आहे (त्रिकोणाच्या सर्व कोनांची बेरीज  $180^\circ$  असते). त्यामुळे दिलेली माहिती किमान आणि स्वतंत्र आहे, याची खात्री करून घ्या.

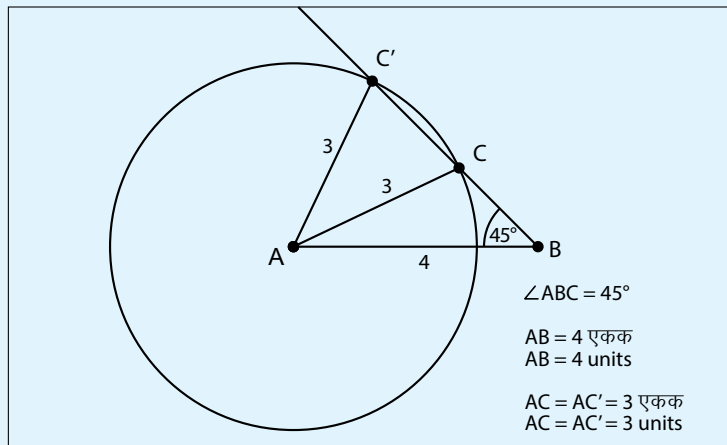
Allow students to make all kinds of possible conjectures. One common conjecture the students come up with is: give all three angles and all three sides. In response to this, you can remind them to come up with a minimum set of information. The six things they just mentioned is a lot of information. Again, giving three sides and two angles is the same as giving three sides and three angles (triangle's angle sum is  $180^\circ$ ). So ensure that the information given is minimum as well as independent.

विद्यार्थ्यांना पुरेसा वेळ द्या. त्यांना त्यांची अनुमाने मांडण्यासाठी आग्रह करा ती अनुमाने कोणत्याही भाषेचा वापर करून, आकृत्यांचा वापर करून, मजकूर वापरून किंवा त्यांचा विचार व्यक्त करायला मदतीचे ठरेल अशा कोणत्याही मार्गाने मांडली तरी चालतील. 10 ते 12 मिनिटांनंतर, पुढील चर्चेसाठी त्यांची अनुमाने एकत्र करा.

Give them sufficient time. Insist that they write down their conjectures, in any language they prefer, using diagrams, using text, or any other way that helps them to convey their thinking. After 10 to 12 minutes, collect their conjectures for further discussion.

विद्यार्थ्यांची अनुमाने पहा आणि त्यांमध्ये एखादा संभाव्य आकृतिबंध दिसतो का, ते शोधा. आमचा अनुभव असा आहे की एकमेव त्रिकोण काढण्यासाठी पुढील माहितीचे संच उपयोगी पडतील, असे विद्यार्थी सांगू शकतात. प्रत्येक संचाचा एक अनुमान म्हणून विचार करावा : Go through the students' conjectures, and look for possible patterns. Based on our experience, students came up with the following sets of information as leading to a unique triangle. Each may be thought of as a conjecture:

- दोन बाजू आणि दोन कोन  
Two sides and two angles
- तीन बाजू (बा-बा-बा) (SSS)  
All three sides (SSS)
- एक बाजू आणि दोन कोन (को-बा-को, को-को-बा) (ASA, AAS)  
One side and two angles (ASA, AAS)
- दोन बाजू एक कोन (बा-बा-को, बा-को-बा) (SSA, SAS)  
Two sides one angle (SSA, SAS)
- तीन कोन (को-को-को) (AAA)  
All three angles (AAA)



आकृती T2 बा-बा-को अटीने एकमेव त्रिकोण मिळत नाही याचे उदाहरण

Figure T2 Showing that SSA specification does not lead to a unique triangle

यांपैकी कोणते संच उपयोगी पडणार नाहीत यावर चर्चा करा. विद्यार्थ्यांना समजेल की यासाठी किमान तीन अटी आवश्यक आहेत; या तीन अटी कोणत्या आहेत, हे शोधून घेण्यासाठी चर्चा करा. बा-बा-को (SSA) सारख्या संचासाठी तुम्हाला काही उदाहरणे द्यावी लागतील. आकृती T2 मध्ये असेच एक उदाहरण आहे. त्याचप्रमाणे तुम्ही को-को-को (AAA) साठी प्रति-उदाहरणे शोधू शकता.

Conduct a discussion about which of these will not work. Students will soon figure out that the number of minimum conditions required is three; discuss to find out which three. For some conjectures such as SSA, you might have to be ready with examples. See one such example in figure T2. Similarly, you can have counter-examples for AAA.

विद्यार्थ्यांना बा-बा-बा (SSS) या संचाबद्दल अधिक खात्री वाटेल. हीच संधी पाहून तुम्ही त्यांना इतका विश्वास का वाटतो, हे विचारू शकता. एकरूपतेच्या कसोट्या का लागू पडतात आणि त्या कसोट्यांची कारणे काय आहेत याबाबतही विद्यार्थ्यांशी चर्चा करा.

Students will feel more convinced about SSS, and you can use this opportunity to ask them why they are so confident about it. Conclude this activity by talking about congruency tests that work, and elicit from students the reasons why those work.



## कृती 6: चौकोनाची रचना करणे

### Task 6: Constructing a quadrilateral

प्रश्न 1 अ. आता तुम्हाला एकरूप त्रिकोण कसे काढायचे, ते माहीत झाले आहे. चला तर, एकरूप चौकोन कसे काढतात ते पाहूया. जर एकरूप त्रिकोण काढण्यासाठी कमीत कमी तीन अटी लागत असतील, तर एकरूप चौकोन काढण्यासाठी किती अटी लागतील?

Q1a. Now that you all know how to make a congruent triangle, let us figure out how to make a congruent quadrilateral. So if the minimum conditions for making a congruent triangle are three, what should be enough for a quadrilateral?

जर विद्यार्थ्यांचे प्रश्न 1 अ चे उत्तर “चार” असेल, तर त्यांना चार अटी का वाटतात आणि कोणत्या चार अटी आहेत, ते विचारा. उदाहरणार्थ, कोणत्याही चार बाजूंची माहिती दिल्यास त्यांना एकमेव चौकोन मिळेल का, असे विचारा. मग त्यांना प्रश्न 1 ब सोडवायला द्या. सुरुवातीला बरेच विद्यार्थी चौरस काढू शकतात. परंतु तुम्ही जेव्हा त्यांना वेगवेगळे चौकोन काढण्यासाठी सांगाल तेव्हा ते वेगवेगळे समभुज चौकोन काढतील.

If the students' answer to Q1a is “four”, ask them why they think it is four, and which four. Ask them if they would get a unique quadrilateral, given information, for example, about all the four sides. Then give them Q1b. At first, many students may draw squares, but when prompted to get different quadrilaterals, they will get multiple rhombuses.

प्रश्न 1 ब. आता दिलेल्या चौकोनाच्या सर्व बाजूंची लांबी 3 सेंमी. असेल, तर तुम्ही वेगवेगळ्या प्रकारचे किती चौकोन काढू शकता याचा विचार करा. दिलेल्या कोऱ्या कागदावर या आकृत्या काढा.

Q1b. Now, given that all the sides of a quadrilateral are 3 cm, think about all the different quadrilaterals that you can draw. Draw the figures on the given blank sheet.

प्रश्न 2. प्रश्न 1 ब मध्ये, तुम्हाला किंवा तुमच्या मित्रमैत्रिणींना वेगवेगळे चौकोन मिळाले का?

Q2. Did you or your friend get different quadrilaterals for Q1b?

प्रश्न 3. जर केवळ चार बाजू दिलेल्या असतील तर तुम्हाला वेगवेगळे चौकोन मिळणे नेहमीच शक्य आहे का? तुम्हाला कसे समजले?

Q3. So if all four sides are given, is it always possible to get different quadrilaterals? How do you know?

प्रश्न 4. अशी कल्पना करा की तुम्हाला एखाद्या चौकोनाबाबत इतरांना कळवायचे आहे. आता तुमच्या मनात जो चौकोन आहे, अगदी तसाच चौकोन तुमच्या मित्रमैत्रीणीने काढावा यासाठी तुम्ही कमीतकमी कोणती माहिती पाठवाल, याचा विचार करा.

Q4. Imagine that you have to write to your friend about a quadrilateral. Now think of the minimum information that you can send him/her, such that he/she gets the exact same quadrilateral as the one you had in your mind. What information will you send?

लक्षात ठेवा, चौकोनांच्या बाबतीत कर्णदेखील असतात. म्हणजे तुमच्याकडे चार बाजू, चार कोन आणि दोन कर्ण अशी एकूण दहा मापांची कमाल माहिती आहे. विद्यार्थ्यांना माहितीचे संयोजन करून मांडण्यासाठी पुरेसा वेळ द्या. आपण किमान चार बाबींची माहिती हवी हे नाकारल्यामुळे, आता किमान पाच बाबी माहीत असायला हव्यात, असे गृहित धरूया. विद्यार्थ्यांची अनुमाने एकत्रित करा आणि ते कसे उपयोगी ठरतील किंवा ठरणार नाहीत, याबद्दल चर्चा करा. इयत्ता 8 वीच्या विद्यार्थ्यांना हे घटक करत असताना आम्हाला काही उदाहरणे मिळाली, ती पुढीलप्रमाणे आहेत :

Remember, in the case of quadrilaterals, you also have the diagonals. So four sides, four angles, and two diagonals, a total of ten measures form the maximum information. Give the students sufficient time to come up with combinations of information. As we ruled out four as minimum information, let us stick to five minimum measures. Collect the students' conjectures and conduct a discussion about how it would work or not work. Some examples we received while working with Class 8 learners are as follows:

- 4 बाजू आणि 1 कर्ण  
4 sides and 1 diagonal
- 2 लगतच्या बाजू आणि 3 कोन  
2 adjacent sides and 3 angles
- 3 बाजू आणि 2 अंतर्भूत कोन  
3 sides and 2 included angles

आपल्याला माहिती म्हणून पाच अटींची गरज का आहे, याबद्दल आणखी एक कारण असू शकते : “चौकोन तयार करण्यासाठी, एखाद्याला चार बिंदू किंवा शिरोबिंदू निश्चित करणे, आवश्यक आहे. आतापर्यंत आपल्याला माहीत झाले असेल की आपल्याला तीन बिंदू निश्चित करण्यासाठी तीन अटी आवश्यक असतात (त्रिकोण). आता आपल्याला चौथा बिंदू निश्चित करायचा आहे. आपल्याकडे असलेली माहिती एक तर कोनाच्या किंवा लांबीच्या संदर्भात आहे. कोनामुळे आपल्याला सरळ रेषा काढता येते आणि लांबीमुळे आपल्याला वर्तुळ काढता येते. त्यामुळे आता हे स्पष्ट आहे की चौथा बिंदू निश्चित करण्यासाठी एक अट पुरेशी नाही, म्हणून आपल्याला किमान पाच अटी लागतील.”

Another reasoning about why we need five pieces of information can be something like this: “To construct a quadrilateral, one needs to fix four points or vertices. By now we know that to fix three points we need three conditions (triangle). We now need to fix the fourth point. The information we have is in terms of either an angle or a length. An angle gives a straight line and a length gives us a circle. So it is clear that one condition is not enough to fix the fourth point, so we will need at least five conditions”.

विद्यार्थी प्रत्यक्षात अशी उदाहरणे तयार करू शकतात आणि त्यांना एकरूप त्रिकोणांची जोडी मिळते का, ते पाहू शकतात. मात्र समजून घेण्यासाठी हे करा; दोन एकरूप त्रिकोण जोडले की चौकोन कसा तयार होतो, ते पहा. याचा उपयोग चौकोनांमधील एकरूपतेच्या अटी सिद्ध करण्यासाठी होऊ शकतो. दोन त्रिकोण जोडले तर आवश्यक असलेल्या सहा अटींची संख्या कमी होऊन पाच होते, कारण या दोन त्रिकोणांची एक बाजू सामाईक असते.

Students can actually construct these examples and see whether they get a pair of congruent triangles. However, a general strategy to understand is to see how two congruent triangles when joined, give rise to a quadrilateral. This understanding can be used to deduce the congruency conditions for quadrilaterals. Joining two triangles reduces the information needed from six to five conditions, as one side overlaps.

तुम्ही सुचवलेली कमीतकमी माहिती खरोखरच काम करते का, हे तपासा. वरील प्रश्नात, तुम्ही तुमच्या मित्रमैत्रीणीला जी माहिती देणार आहात, त्यावर आधारीत वेगवेगळे चौकोन काढण्याचा प्रयत्न करा.

Check whether what you suggested as the minimum information really works. Try drawing different quadrilaterals for the information you said you would give your friend in the question above.

प्रश्न 5. तुमच्या माहितीमुळे एकरूप असलेले किंवा एकरूप नसलेले चौकोन का मिळतील, याचा विचार करा.

Q5. Think about why this set of information will lead to congruent or non-congruent quadrilaterals.

प्रश्न 6. एकमेव चौकोन काढण्यासाठीच उपयोगी ठरतील, अशा अटींची यादी करा.

Q6. List the conditions that worked for constructing a unique quadrilateral.

एकरूप चौकोन मिळण्यासाठी काही प्रमाणित अटी आहेत, त्या तुमच्या संदर्भासाठी पुढे दिलेल्या आहेत.

Some standard conditions that will give congruent quadrilaterals are given below for your reference.

- तीन लगतच्या बाजू आणि त्या बाजूंमध्ये समाविष्ट असलेले दोन कोन  
Three adjacent sides and two included angles within those sides
- तीन कोन आणि त्या कोनांलगत असलेल्या दोन बाजू  
Three angles and two included sides within those angles
- मुळात, कोणत्याही चौकोनाच्या एकरूपतेसाठी किमान पुढील अटी आहेत : को-को-को-बा-बा, को-को-बा-को-बा, को-बा-को-बा-को, बा-को-बा-को-बा (AAASS, AASAS, ASASA, SASAS)  
Basically, for any quadrilateral the following are the minimum conditions for congruency: AAASS, AASAS, ASASA, SASAS
- जर चौकोन अंतर्वक्र असतील, तरच एकरूपतेसाठी चार बाजू आणि एक कोन या अटी असू शकतात.  
Four sides and an angle can be conditions for congruency only if the quadrilaterals are concave

ABCD' आणि ABCD'' या चौकोनांमध्ये,

$\ell(AB) = 5, \ell(BC) = 6, \angle ABC = 90^\circ,$

$\ell(AD') = \ell(AD'') = 4$  आणि  $\ell(CD') = \ell(CD'') = 5.$

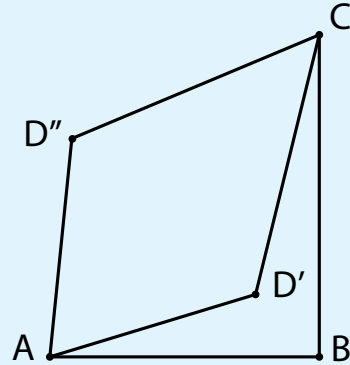
पण ABCD' हा ABCD'' शी एकरूप नाही

In the quadrilaterals ABCD' and ABCD'',

$\ell(AB) = 5, \ell(BC) = 6, \angle ABC = 90^\circ,$

$\ell(AD') = \ell(AD'') = 4$  and  $\ell(CD') = \ell(CD'') = 5.$

But ABCD' is not congruent to ABCD''



आकृती T3 बा-बा-बा-बा-को हे अनुमान खोडून काढणारे उदाहरण

Figure T3 Refuting a SSSSA conjecture



## कृती 7: काही खास त्रिकोण आणि चौकोन

### Task 7: Some special triangles and quadrilaterals

एकरूप त्रिकोण आणि एकरूप चौकोन काढण्यासाठी कोणती कमीतकमी माहिती आवश्यक असते, ते आपण पाहिले. परंतु आता आपण काही खास त्रिकोण आणि चौकोन पाहू आणि त्यांची रचना करण्यासाठी कोणती कमीतकमी माहिती आवश्यक असते, ते पाहू.

We have found out the minimum information needed to draw congruent triangles and congruent quadrilaterals, but let us look at some special triangles and quadrilaterals and find out the minimum information we need to construct these.

प्रश्न 1. एकरूप समभुज त्रिकोण काढण्यासाठी तुम्हाला कोणत्या कमीतकमी अटींची गरज असते?

Q1. Which minimum conditions do you need to construct congruent equilateral triangles?

विद्यार्थ्यांच्या हे लक्षात येईल की एकरूप त्रिकोण काढण्यासाठी समभुज त्रिकोणाच्या फक्त एका बाजूची लांबी पुरेशी असते. खरं तर, समभुज त्रिकोणाच्या एका बाजूची लांबी दिली, तरी सर्वच माहिती म्हणजे सहाही अटी (तीन बाजू आणि तीन कोन) तुम्ही देत आहात. या मुद्द्याकडे ही कृती करत असताना लक्ष वेधा.

The students will find out that only the length of the equilateral triangle is enough to draw a congruent triangle. In fact, by giving the length of the side of an equilateral triangle, you are giving all the 6 pieces of information (3 sides and 3 angles). Do emphasise this while discussing this task.

प्रश्न 2. एकरूप चौरस काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?

Q2. Which minimum conditions do you need to construct congruent squares?

विद्यार्थ्यांच्या हे लक्षात येईल की एकरूप चौरस काढण्यासाठी फक्त एका बाजूची लांबी माहित असणे, पुरेसे असते. खरं तर तो चौरस आहे असे सांगून आणि चौरसाच्या एका बाजूची लांबी देऊन, तुम्ही आठ अटी (चार बाजू आणि चार कोन; सर्व कोन  $90^\circ$ ) देत आहात. या मुद्द्याकडे ही कृती करत असताना लक्ष वेधा.

The students will find out that only the length of the side is enough to draw congruent squares. In fact, by saying that it is a square and giving the length of the side of a square, you are giving 8 conditions (4 sides and 4 angles; all angles are  $90^\circ$ ). Do emphasise this while discussing this task.

प्रश्न 3. एकरूप आयत काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?

Q3. Which minimum conditions do you need to construct congruent rectangles?

विद्यार्थ्यांच्या हे लक्षात येईल की आयताच्या बाबतीत, फक्त दोन लगतच्या बाजूंची लांबी पुरेशी आहे. खरं तर, आयताच्या दोन लगतच्या बाजूंची लांबी देऊन, तुम्ही सर्व आठ अटी (4 बाजू—विरुद्ध बाजू समान आहेत: 4 कोन—सर्व कोन  $90^\circ$  आहेत) देत आहात. या मुद्द्याकडे ही कृती करत असताना लक्ष वेधा.

The students will find out that in the case of rectangles, you need the lengths of two adjacent sides. In fact, by giving the lengths of two adjacent sides of a rectangle, you are giving all the 8 conditions (4 sides—opposite sides are equal: 4 angles—all angles are  $90^\circ$ ). Do emphasise this while discussing this task.

प्रश्न 4. एकरूप समभुज चौकोन काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?

Q4. Which minimum conditions do you need to construct congruent rhombuses?

विद्यार्थी हे शोधून काढतील की समभुज चौकोनाच्या बाबतीत, आपल्याला एका बाजूची लांबी आणि एक कोन माहीत असणे, गरजेचे आहे. खरं तर, समभुज चौकोनाच्या एका बाजूची लांबी आणि एका कोनाचे माप देऊन, तुम्ही आठ अटी देत आहात (चार बाजू—सर्व बाजू समान असतात; चार कोन—लगतचे कोन पूरक असतात आणि विरुद्ध कोन समान असतात). या मुद्द्याकडे ही कृती करत असताना लक्ष वेधा.

The students will find out that in the case of rhombus, you need the length of one side and one angle. In fact, by giving the length of one side and the measure of one angle of a rhombus, you are giving 8 conditions (4 sides—all sides are equal; 4 angles—adjacent angles are complementary and opposite angles are equal). Do emphasise this while discussing this task.

प्रश्न 5. एकरूप समांतरभुज चौकोन काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?

Q5. Which minimum conditions do you need to construct congruent parallelograms?

समांतरभुज चौकोनाच्या बाबतीत, तुम्हाला लगतच्या दोन बाजूंची लांबी आणि त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन माहीत असणे, गरजेचे आहे. खरं तर, समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या दोन बाजूंची लांबी आणि त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन सांगितला, तर तुम्ही आठ अटी सांगत आहात (चार बाजू—विरुद्ध बाजू समान असतात; चार कोन—विरुद्ध कोन समान असतात आणि लगतचे कोन पूरक असतात). या मुद्द्याकडे ही कृती करत असताना लक्ष वेधा.

In the case of parallelograms, you need the lengths of two adjacent sides and the including angle. In fact, by giving the lengths of two adjacent sides of a parallelogram and the including angle, you are giving 8 conditions (4 sides—opposite sides are equal; 4 angles—opposite angles are equal and adjacent angles are complementary). Do underline this while discussing this task.

प्रश्न 6. एकरूप समलंब चौकोन काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?

Q6. Which minimum conditions do you need to construct congruent trapeziums?

समलंब चौकोनाच्या बाबतीत, तुम्हाला समांतर नसलेल्या एका बाजूची लांबी, पायाची लांबी आणि पायालगतच्या दोन कोनांची मापे आवश्यक आहेत. हा चौकोन समलंब चौकोन आहे असे सांगून, तुम्ही दिलेल्या माहितीवरून दुसरी समांतर बाजू काढता येईल.

In the case of trapeziums, you need the length of one non-parallel side, length of the base, and measure the two bases angles. By saying that the quadrilateral is a trapezium, you can construct the other parallel side from the given information.

आपण सर्व कृतींकडे एकत्रितपणे पाहिल्यास, आपल्या लक्षात येईल की एकरूप चौरस काढण्यासाठी स्पष्टपणे फक्त एकच माहिती लागते, आयतासाठी आणि समभुज चौकोनासाठी दोन स्वरूपाची माहिती लागते, समांतरभुज चौकोनासाठी तीन स्वरूपाची माहिती आणि समलंब चौकोनासाठी चार स्वरूपाची माहिती आवश्यक असते. आपल्याला जर आठवत असेल तर चौरस हा आयत किंवा समभुज चौकोनाचा विशेष प्रकार आहे, आयत किंवा समभुज चौकोन हे समांतरभुज चौकोनाचे विशेष प्रकार आहेत आणि समांतरभुज चौकोन हा समलंब चौकोनाचा विशेष प्रकार आहे.

If you look at all the tasks together, you will notice that to construct congruent squares one needs only one piece of information explicitly, for rectangles and rhombus it will be two pieces of information, for parallelogram it is three, and for trapeziums it is four. If we recall, squares are special cases of rectangle or rhombuses, rectangles or rhombuses are special cases of parallelograms, and parallelograms are special cases of trapezium.

म्हणून तुम्ही जेवढे अधिकाधिक सामान्य चौकोन काढाल, तसे एकमेव चौकोन काढण्यासाठी लागणाऱ्या अटींची संख्या वाढत जाईल, जोपर्यंत तुम्ही पाच अटीपर्यंत पोहोचणार नाहीत.

So as you construct more and more general quadrilaterals, you will need more pieces of information to construct unique ones, till you reach five pieces of information.

## कृती 8: पंचकोन काढणे Task 8: Constructing a pentagon

प्रश्न 1. आता तुम्हाला एकरूप त्रिकोण किंवा एकरूप चौकोन कोणकोणत्या अटीनुसार काढता येतो, हे समजले आहे. चला तर, आता पंचकोन काढूया. जर एकरूप त्रिकोण काढण्यासाठी कमीतकमी अटींची संख्या तीन असेल आणि एकरूप चौकोन काढण्यासाठी कमीतकमी अटींची संख्या पाच असेल, तर एकरूप पंचकोन काढण्यासाठी कमीतकमी अटींची संख्या किती असेल, असे तुम्हाला वाटते?

Q1. Now that you all know what conditions give constructions of congruent triangles or congruent quadrilaterals, let us figure out how to construct congruent pentagons. So, if the minimum conditions for making congruent triangles are three, and that for congruent quadrilaterals are five, what do you think is the number of minimum conditions needed to construct congruent pentagons?

बहुधा, आकृतिबंध पाहून विद्यार्थी 'सात' उत्तर देतील. त्यांनी दिलेले उत्तर बरोबर असले, तरी सातपैकी काही अटी शोधण्यासाठी विद्यार्थ्यांकडून माहिती मिळवा ज्यावरून एकमेव पंचकोन काढता येईल.

Mostly, the students will answer seven, by looking at the pattern. Though the answer is correct, probe the students to find some of the seven conditions, such that they give a unique pentagon.

प्रश्न 2. अशी कल्पना करा की मित्रमैत्रिणींना पंचकोनाबाबत सांगायचे आहे. तुमच्या मनात जो पंचकोन आहे अगदी तसाच पंचकोन त्यांना काढता यावा, यासाठी तुम्ही कोणकोणती माहिती पाठवाल?

Q2. Imagine that you have to write to your friend about a pentagon. Now think of the minimum information that you can send him/her, such that he/she gets the exact same pentagon as the one you had in your mind. What information you will send?

चौकोनांप्रमाणेच, पंचकोनांमध्येही कर्ण असतात. म्हणून पाच बाजू, पाच कोन आणि पाच कर्ण, अशी मिळून पंधरा मापांची कमाल माहिती मिळते. विद्यार्थ्यांना माहितीचे संयोजन करण्यासाठी पुरेसा वेळ द्या. विद्यार्थ्यांची अनुमाने एकत्र करा आणि ती बरोबर आहेत की नाहीत, याबद्दल चर्चा करा.

As in the case of quadrilaterals, for pentagons, there will be diagonals. So five sides, five angles, and five diagonals, a total of fifteen measures form the maximum information. Give the students sufficient time to come up with combinations of information. Collect the students' conjectures and conduct a discussion about how it would work or not work.

तुम्ही सुचवलेली माहिती प्रत्यक्षात उपयोगी पडते का, ते तपासा. वरील प्रश्नात तुम्ही जी माहिती सांगणार आहात, त्यावर आधारित वेगवेगळे पंचकोन काढण्याचे प्रयत्न करा.

Check whether what you suggested as the minimum information really works. Try drawing different pentagons for the information you said you would give your friend in the question above.

प्रश्न 3. या माहितीनुसार एकरूप किंवा एकरूप नसलेले पंचकोन का तयार होऊ शकतात, यावर विचार करा.

Q3. Think about why this set of information will lead to congruent or non-congruent pentagons.

प्रश्न 4. एकमेव पंचकोन काढण्यासाठी कोणकोणत्या अटी उपयोगी ठरल्या, याची यादी करा.

Q4. List the conditions that worked for making a unique pentagon.

पंचकोन एकरूप आहे किंवा नाही ते निश्चित करणाऱ्या अटींचे काही संच तुमच्या संदर्भासाठी पुढे दिले आहेत.

Some sets of conditions that give congruent pentagons are given below for your reference.

- सर्व पाच बाजू आणि दोन कर्ण  
All 5 sides and 2 of the diagonals
- सर्व चार बाजू आणि समाविष्ट असलेले तीन कोन  
All 4 sides and 3 included angles
- चार कोन आणि त्यांच्या लगतच्या बाजू  
angles and their included sides

## कृती 9: एकरूप बहुभुजाकृती काढण्यासाठी लागणाऱ्या अटींची किमान संख्या शोधणे



### Task 9: Finding the number of conditions to construct a congruent polygon

आता तुम्हाला एकरूप त्रिकोण, एकरूप चौकोन आणि एकरूप पंचकोन काढण्यासाठी आवश्यक असलेल्या अटींची संख्या माहीत झाली आहे. चला तर, आता एकरूप षटकोन आणि एकरूप सप्तकोन काढण्यासाठी किती अटी लागतात, ते पाहूया.

Now that you know the minimum conditions needed for constructing congruent triangles, congruent quadrilaterals and congruent pentagons, let us explore how many conditions are needed for constructing congruent hexagons, or congruent heptagons.

काही अंदाज करा आणि दिलेल्या कागदावर रचना करा. तुमच्या अंदाजाबाबत तक्ता 1 मध्ये माहिती लिहा.

Make some guesses, and make constructions on the given sheets of paper. Record your guesses in table 1 below.

बहुभुजाकृतीतील बाजूंची संख्या Number of sides in the polygon	बहुभुजाकृतीचे नाव Name of the polygon	एकरूप बहुभुजाकृती काढण्यासाठी आवश्यक असलेल्या अटींची संख्या Minimum conditions required for constructing a congruent polygon
3	त्रिकोण Triangle	3
4	चौकोन Quadrilateral	
5	पंचकोन Pentagon	
6	षटकोन Hexagon	
7	सप्तकोन Heptagon	
8	अष्टकोन Octagon	

तक्ता 1 एकरूप बहुभुजाकृती काढण्यासाठी लागणाऱ्या कमीतकमी अटी

**Table 1** Minimum conditions required for constructing a congruent polygon

काही विद्यार्थी आकृतीबंधाचे निरीक्षण करून तक्ता पूर्ण करू शकतात. काही विद्यार्थ्यांना तक्ता समजून घेताना अडचणी येऊ शकतात. विद्यार्थ्यांना पुरेसा वेळ द्या आणि नंतर विद्यार्थ्यांची उत्तरे घेऊन फळ्यावरील तक्ता पूर्ण करा.

Some students may complete the table by observing the pattern. Some students may struggle with the table. Give ample time to the students and then collect responses to complete the table on the board.

### आपली अनुमाने सिद्ध करणे

#### Proving our Conjectures

चला, आपली कोणती अनुमाने बरोबर आहेत आणि कोणती चुकीची आहेत, ते आपण कसे सिद्ध करू शकतो, ते पाहूया.

Let us find out how we can prove which guesses are right and which ones are wrong.

एक चौकोन काढा.

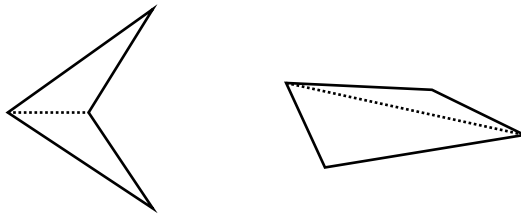
Draw a quadrilateral.

या चौकोनात असा एक कर्ण काढा की चौकोनाचे दोन त्रिकोण बनतील. आकृती 1 पहा.

Draw a diagonal inside the quadrilateral so that it splits into two triangles. See Figure 1.

(येथे, आपण दोन वेगवेगळ्या प्रकारचे चौकोन काढले आहेत).

(Here we have drawn two different types of quadrilaterals).



आकृती 1 चौकोनांचे त्रिकोणीकरण

Figure 1 Triangulation of quadrilaterals

आपण पाहिले की प्रत्येक चौकोन या प्रकारे दोन त्रिकोणांमध्ये विभागता येतो. आपल्याला हेदेखील माहीत आहे की एकमेव असा त्रिकोण काढण्यासाठी आपल्याला कमीतकमी तीन अटी आवश्यक असतात.

We see that every quadrilateral can be split into two triangles in this way. We know that for constructing a unique triangle we need three minimum conditions.

म्हणून, पहिला त्रिकोण काढण्यासाठी आपल्याला तीन अटी आवश्यक आहेत. पुढच्या त्रिकोणासाठी आपल्याला अजून तीन अटी लागतील. परंतु त्यांच्यातील एक बाजू सामाईक असल्याने दुसऱ्या त्रिकोणाचा एकरूप त्रिकोण काढण्यास आपल्याला फक्त दोन इतर अटी लागतील. या अटी म्हणजे 1) एक बाजू आणि 2) या बाजूने चौकोनाच्या कर्णाशी केलेला कोन. किंवा या अटीऐवजी, आपण कोणतेही दोन कोन देऊ शकतो.

So in this case, to construct the first triangle we needed three minimum conditions. For the next triangle, we need three more, but as one side is common, we need only two other conditions to construct a triangle congruent to the second triangle. These can be, for example, 1) a side and 2) the angle that this side makes with the diagonal of the quadrilateral. Or alternatively, one can also give two angles.

याचा असाही विचार करता येईल, तो म्हणजे एकदा आपण पहिला त्रिकोण निश्चित केला की त्या चौकोनाचे तीन शिरोबिंदू निश्चित होतात. म्हणजे उरलेला शिरोबिंदू निश्चित करण्यासाठी, दोन अटी (वरील उदाहरणात सांगितल्याप्रमाणे) पुरेशा आहेत. म्हणून या किमान पाच अटी एखाद्या चौकोनाची रचना करण्यासाठी पुरेशा असतात.

Another way of thinking about this is, once we fix the first triangle, three vertices of the quadrilateral are fixed. So to fix the remaining vertex, two conditions (as in the examples above) are sufficient. Hence these five conditions are the minimum pieces of information needed to construct a quadrilateral.

त्यामुळे चौकोनाच्या रचनेसाठी लागणाऱ्या कमीतकमी अटीबद्दलचे आपले आकलन बरोबर ठरते.

This also reconfirms our understanding of the minimum conditions needed to construct a unique quadrilateral.

आपण हीच पद्धत पंचकोनासाठी वापरली तर काय होईल?

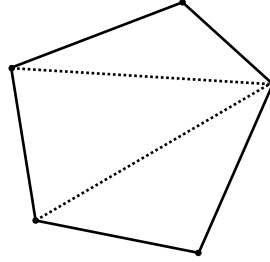
What will happen if we do the same for a pentagon?

चला एक पंचकोन काढू आणि हा पंचकोन कमीत कमी कर्ण काढून किती त्रिकोणात विभागता येईल, ते पाहू. आकृती 2 पहा. या आकृतीतून लक्षात येईल की दोन कर्ण काढले असता, पंचकोन तीन त्रिकोणात विभागता येतो.

Let us draw a pentagon and see how many triangles the pentagon can be split into by drawing a minimum number of diagonals. We see from figure 2 that by drawing two diagonals, the pentagon can be split into three triangles.

पहिल्या त्रिकोणासाठी आपल्याला तीन अटी लागतील, दुसऱ्या त्रिकोणासाठी आपल्याला अजून तीन अटी लागतील, परंतु एक बाजू सामाईक असल्याने आपल्याला फक्त दोन अटी लागतील. तसेच तिसऱ्या त्रिकोणासाठी आपल्याला अजून दोन अटी लागतील.

For the first triangle we need three conditions, for the second triangle we need another three, but then one side overlaps so we need only two. Similarly, for the third triangle, we need two more conditions.



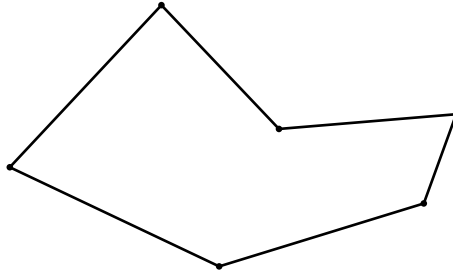
आकृती 2  
Figure 2

थोडक्यात, तुमच्या लक्षात आले असेल की प्रत्येक वेळी आपण एक त्रिकोण जोडतो, तेव्हा दोन अटी वाढतात. म्हणून एकमेव असा पंचकोन काढण्यासाठी कमीतकमी सात ( $3 + 2 + 2$ ) अटी आवश्यक असतात.

So, you can see that whenever you add a triangle, you add two conditions. So, the minimum conditions necessary for constructing a unique pentagon are seven ( $3 + 2 + 2$ ).

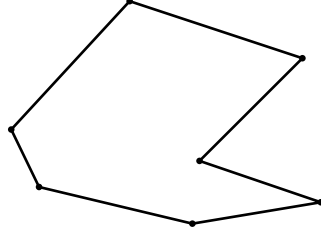
चला तर आता षटकोन, सप्तकोन आणि अष्टकोन यांच्यासाठी किमान अटी किती लागतील, ते पाहू.

Let us try to figure this out for hexagons, heptagons, and octagons.



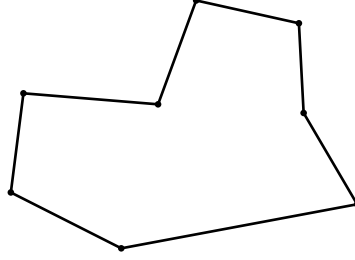
आकृती 3  
Figure 3

1. एखादा षटकोन किती त्रिकोणांत विभागता येईल? (लक्षात ठेवा, काढलेल्या कर्णांची संख्या कमीतकमी असायला हवी)\_\_\_\_\_
- How many triangles can a hexagon be split into? (Remember that the number of diagonals drawn must be a minimum.)  
\_\_\_\_\_
2. एकमेव असा षटकोन काढण्यासाठी किमान किती अटी आवश्यक असतात? आणि का?\_\_\_\_\_
- What is the minimum number of conditions needed to construct unique hexagons? Why?\_\_\_\_\_
3. एखादा सप्तकोन किती त्रिकोणांत विभागता येऊ शकतो? आणि का?\_\_\_\_\_
- How many triangles can a heptagon be split into? Why?\_\_\_\_\_



आकृती 4  
Figure 4

4. एकमेव असा सप्तकोन काढण्यासाठी किमान किती अटी आवश्यक असतात? आणि का? \_\_\_\_\_  
What is the minimum number of conditions needed to construct unique heptagon? Why? \_\_\_\_\_



आकृती 5  
Figure 5

5. एखादा अष्टकोन किती त्रिकोणांत विभागता येऊ शकतो? आणि का? \_\_\_\_\_  
How many triangles can an octagon be split into? Why? \_\_\_\_\_
6. एकरूप अष्टकोन काढण्यासाठी किमान किती अटी आवश्यक असतात? आणि का? \_\_\_\_\_  
What is the minimum number of conditions needed to construct congruent octagon? Why? \_\_\_\_\_

एकमेव बहुभुजाकृती काढण्यासाठी किमान कोणती माहिती आवश्यक आहे, हे पाहणे रंजक ठरेल. आपण 'n' बाजू असलेल्या बहुभुजाकृतीने सुरुवात करू. पहिले तीन शिरोबिंदू निश्चित करण्यासाठी, आपल्याला तीन अटी आवश्यक आहेत. बाकी  $n - 3$  शिरोबिंदूसाठी, आपल्याला किमान दोन स्वरूपाची माहिती किंवा अटी आवश्यक आहेत. म्हणून आपल्याला किमान  $2(n - 3) + 3 = 2n - 3$  अटी आवश्यक आहेत. बहुभुजाकृतीचे  $(n - 2)$  त्रिकोणांमध्ये विभाजन केले तर आपल्याला लक्षात येईल की  $(2n - 3)$  अटी एकमेव बहुभुजाकृती तयार करायला पुरेशा आहेत. म्हणून एकमेव बहुभुजाकृती तयार करण्यासाठी आवश्यक असलेल्या किमान अटींची संख्या  $2n - 3$  असेल.

It is interesting to see what is the minimum information needed to construct a unique polygon. Let us start with a polygon with  $n$  sides. To fix the first three vertices, we need three conditions. For each of the  $n - 3$  remaining vertices, we need at least two pieces of information or conditions. Hence we need at least  $2(n - 3) + 3 = 2n - 3$  conditions. And the process of dividing the polygon into  $(n - 2)$  triangles tells us that  $2n - 3$  conditions are sufficient to construct a unique polygon. So, the number of minimum conditions required to construct a unique polygon is  $2n - 3$ .



## अधिक वाचनासाठी Suggested Readings

- Simple argument about the number of minimum conditions needed to construct congruent polygons <https://www.mathopenref.com/congruentpolygonstests.html>
- A simulation to check congruent polygons by super-positioning <https://www.mathopenref.com/congruentpolygons.html>
- Interesting examples of congruence <https://www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/geom07.htm>
- Detailed proof of why the number of minimum conditions needed to construct congruent n-gons is  $2n-3$  [http://www.amesa.org.za/amesal\\_n21\\_a12.pdf](http://www.amesa.org.za/amesal_n21_a12.pdf)

## संदर्भ References

- Plaksin, O., & Patkin, D. (2016). Exploring the minimum conditions for congruency of polygons. Learning and Teaching Mathematics, 2016(2), 42-46. [http://www.amesa.org.za/amesal\\_n21\\_a12.pdf](http://www.amesa.org.za/amesal_n21_a12.pdf)
- Page, John D. Congruent polygons. From Math Open Reference. <https://www.mathopenref.com/congruentpolygons.html>