



8.01

युक्लिडचे खेळ Euclid's Game

Main Authors: Jayasree S., Shweta Naik

Reviewers: Amol Dighe, H. C. Pradhan

English Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam

Marathi Translator: Vijay D. Lale

Marathi Editors: Deepa Chari, Vijay D. Lale

Marathi Editorial Assistance: Aaloka Kanhere, Sushma Rawool, Nilkantha Gholap

Creative Commons License: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE

8.1. युक्लिडचे खेळ Euclid's Game

आढावा Overview

दोन नैसर्गिक संख्यांचा मसावि काढण्यासाठीच्या युक्लिड कार्यावलीवर (Euclid's Algorithm) हा खेळ आधारलेला आहे. या खेळात, विद्यार्थी युक्लिडची कार्यावली वापरून केवळ खेळत नाहीत, तर गणित करण्याच्या प्रक्रिया जसे अनुमान (conjecture) काढणे, प्रति-उदाहरण (counter example) देणे, अनुमान नाकारणे आणि निष्कर्ष सिद्ध करणे इत्यादी कौशल्येदेखील आत्मसात करतात.

Here is a game that is based on the Euclidean algorithm to find the highest common factor of two natural numbers. In this game, students not only play the game making moves that correspond to steps of the Euclidean algorithm, but also engage in doing mathematics by making conjectures, giving counter-examples, refuting conjectures, and proving the results.

महत्त्वाची बाब ही की 'एखादे विधान खरे नाही' हे पडताळण्यासाठी आपल्याला प्रति-उदाहरण शोधावे लागते. या अध्ययन घटकाचा भाग म्हणून आपल्याला विद्यार्थ्यांशी चर्चा करावी लागेल आणि 'बरोबर अंदाज' आणि 'गणितीय परिणाम' यातील फरक विद्यार्थ्यांना स्पष्ट करावा लागेल. तसेच गणितीय विधानाची सत्यता तपासताना फक्त उदाहरणे देणे पुरेसे नसते; एखादे विधान चुकीचे ठरवताना केवळ एक प्रति-उदाहरण देणेही पुरेसे ठरते, याची चर्चा करावी लागेल.

An important idea is that we need to look for counter-examples to find out that a statement is not true. As a part of this unit, you should talk to the students and try to differentiate between a true prediction and a mathematical result. Also discuss how in the case of establishing the correctness of a mathematical result, giving examples is not enough; while in the case of proving a result wrong, counter-examples are enough.

अध्ययन घटकाची उद्दिष्टे Unit-specific objectives

- संख्यांमधील आकृतिबंध पाहणे आणि आढळलेला आकृतिबंध स्पष्ट शब्दात मांडणे
To observe patterns in numbers and articulate the observed pattern clearly
- अनुमान नाकारण्यासाठी प्रति-उदाहरण शोधणे
To look for counter-examples to refute a conjecture
- अनुमान सिद्ध करण्यासाठी उदाहरणे पुरेशी नाहीत, हे समजून घेणे
To understand that examples are not sufficient to prove a conjecture
- अनुमान नाकारण्यासाठी केवळ एक प्रति-उदाहरण पुरेसे असते, हे समजून घेणे
To understand that just one counter-example is sufficient to disprove a conjecture
- अनुमानाला पुष्टी मिळेल, असा तार्किक युक्तिवाद करणे
To come up with a logical argument (i.e. a proof) in support of a conjecture
- दोन संख्यांतील मसावि काढण्यासाठी संख्यांची क्रमवर्ती वजाबाकी (successive subtraction) आणि युक्लिडची कार्यावली यातील संबंध समजून घेणे
To understand the relation between taking successive differences and the Euclidean algorithm to find the highest common factor (HCF) of two numbers



किमान आवश्यक वेळ
Minimum time required

40 मिनिटांची तीन सत्रे
Three sessions of 40 mins each



अध्ययन घटकाचा प्रकार
Type of learning unit

वर्गामध्ये करावयाचे अध्ययन घटक
Classroom-based

अभ्यासक्रमाशी दुवा Links to curriculum

Class 6 Mathematics	Class 10 Mathematics
Chapter 3 : Playing with numbers (Nov, 2022) The concept of factors, relatively prime (co-prime) numbers and multiples The concept of Highest Common Factor (HCF)	Chapter 1 : Real numbers (Nov, 2022) Euclid's Lemma

तक्ता T1

Table T1

ओळख Introduction

आपल्याला खेळताना खूप मजा येते. आज आपण असा खेळ खेळणार आहोत, जो प्रत्येक वेळी जिंकण्यासाठी तुम्ही मार्ग शोधा!

Playing games is a lot of fun. Today you are going to play a game that involves numbers, and you will find a way to win the game, always!



कृती 1: खेळा युक्लिडचा खेळ Task 1: Play the Euclid's game

- या खेळात दोन विद्यार्थी भाग घेऊ शकतात.
This is a two-player game.

- खेळाचे नियम पुढीलप्रमाणे आहेत.
The rules of the game are as follows:

- खेळाला सुरुवात प्रथम कोण करणार, हे तुम्ही ठरवू शकता. यात खेळाडू-1 ने 1 ते 100 पैकी कोणतीही एक नैसर्गिक संख्या लिहायची आहे. या संख्येला आपण 'A' म्हणू. यानंतर खेळाडू-2 त्याच्या आवडीची 1 ते 100 पैकी दुसरी कोणतीही संख्या लिहिल. या संख्येला आपण 'B' म्हणू.
You can decide who plays first. The first player, say Player 1, writes down a number that is between 1 and 100, including both. Let us call this number 'A'. The second player, say Player 2, can write down another number of his/her choice. Let's call this number 'B'.
- आता विद्यार्थी-1 ($A - B$) किंवा ($B - A$) अशा रीतीने वजाबाकी करेल, ज्यामुळे उत्तर 'धन' संख्या येईल. या संख्येला आपण 'C' म्हणू.
Now, the first player will write the number ($A - B$) or ($B - A$), whichever is positive. Let's call this number 'C'.
- आता विद्यार्थी 2 खेळेल. तिच्याकडे पर्याय आहेत. ती C आणि A यांची वजाबाकी करू शकते किंवा C आणि B यांची वजाबाकी करू शकते. मात्र आलेले उत्तर यादीत असल्यास (जर A, B किंवा C), विद्यार्थींनी ती संख्या पुन्हा लिहू शकणार नाही (सर्व उत्तरे धन असायला हवीत, हे लक्षात ठेवा).



साहित्य
Materials

फळा, खडू, कागद
Blackboard, chalk and
sheets of paper

Next, it is the second player's turn. He/she has a choice. He/She can either write the difference between C and A or the difference between C and B. However, if one of these differences is already in the list (i.e., if it is A or B or C) then it cannot be written again. (All differences are taken to be positive.)

- खेळ असाच पुढे चालू ठेवताना खेळाडू आळीपाळीने यादीतील कोणत्याही दोन संख्यांची वजाबाकी करून मिळालेली धन संख्या लिहितील. मात्र ती संख्या यादीमध्ये आधीपासूनच नाही, हे विद्यार्थी पाहतील.
Similarly, in subsequent turns, the players take turns to write a number which is the difference between any two numbers in the list, provided the number itself is not already present in the list.
- जेव्हा कोणतीही नवीन संख्या लिहिणे शक्य नसेल, तेव्हा हा खेळ संपेल.
The game ends when it is not possible to write any new number.
- जी खेळाडू शेवटची संख्या लिहिल, ती खेळ जिंकेल.
The person who writes the last number will be the winner.

आता आपण हा खेळ एकदा खेळून पाहू.

Let us look at a sample run of the game.

- समजा, खेळाडू-1 ने 12 ही संख्या लिहिली, तर खेळाडू-2 ही उरलेल्या 99 संख्यांमधून संख्या निवडू शकते.
Suppose, the first player writes 12. The second player has 99 choices to choose his/her number (as the upper limit is 100).
- समजा खेळाडू-2 ने 16 ही संख्या निवडली, तर खेळाडू-1 ही 4 ही संख्या लिहिल, कारण 16 आणि 12 यांची वजाबाकी 4 येते.
Suppose, the second player chooses 16, then the first player can only write 4, i.e. the difference between 16 and 12.
- त्यानंतर खेळाडू-2 ही 8 ही संख्या लिहिल. कारण 12 आणि 4 यांची वजाबाकी केल्यास उत्तर 8 येते. लक्षात घ्या, खेळाडू-2 ने 16 आणि 4 यांच्या वजाबाकीतून येणारी 12 ही संख्या लिहिलेली नाही, कारण 12 ही संख्या आधीपासूनच यादीत आहे.
The second player then writes 8, the difference between 12 and 4. Note that the player could not have written the difference between 16 and 4, as 12 is already in the list.
- आता, येथे कोणत्याही नवीन संख्येची शक्यता दिसत नाही. त्यामुळे हा खेळ 4, 8, 12, 16 या संख्यांबरोबर संपेल (यादीत 12, 16, 4, 8 या क्रमाने संख्या येतात).
Now there is no possibility of writing new numbers, so the game ends with the numbers 4, 8, 12, and 16 appearing in the list (12, 16, 4, 8 in the order of appearance).
- वरील यादीत चार संख्या आहेत आणि खेळाडू-2 ने हा खेळ जिंकलेला आहे. कारण शेवटची 8 ही संख्या तिने लिहिली आहे.
There are four numbers in the list, and the second player is the winner, as he/she wrote the last number 8.

तुमच्या वर्गमित्रांबरोबर हा खेळ पुन्हापुन्हा खेळा. प्रत्येक वेळी खेळताना तयार झालेल्या यादीचा अभ्यास करा आणि तुमची निरीक्षणे पुढील तक्त्यात लिहा. शेवटच्या रकान्यात जेथे तुम्ही विजेत्याचे नाव लिहाल, तेथे खेळाडू-1 (ज्याने पहिली संख्या निवडली) जिंकला किंवा खेळाडू-2 (ज्याने दुसऱ्यांदा संख्या निवडली) जिंकला, ते लिहा.

Play this game with your partner multiple times. Study the lists of numbers that you got for each game and record your observations in the table below. For the last column, where you record the winner, mention whether Player 1 (who chose the first number) won or Player 2 (who chose the second number) won.

सुरुवातीच्या संख्या Initial Numbers		यादीतील सर्वात लहान संख्या The smallest number in your sequence	यादीतील सर्वात मोठी संख्या The largest number in your sequence	यादीतील सर्व संख्या (चढत्या क्रमाने) All numbers in a sequence (in ascending order)	यादीत एकूण किती संख्या आहेत? How many numbers are there in your sequence?	विजेता Winner
खेळाडू-1 Player 1	खेळाडू-2 Player 2					

तक्ता 1

Table 1

शिक्षक फळ्यावर हा तक्ता लिहू शकतात. सर्व विद्यार्थ्यांनी वरील खेळ काही वेळा खेळल्यानंतर, काही विद्यार्थ्यांकडून उत्तरे मिळवा आणि फळ्यावरच्या तक्त्यात भरा (सुरुवातीला काही वेळा खेळताना मजा येते. जेव्हा विद्यार्थी पुन्हापुन्हा खेळून दमले आहेत किंवा कंटाळले आहेत असे वाटेले, तेव्हा शिक्षक खेळ थांबवून चर्चा करू शकतात).

The teacher can also make this table on the board. After all the students finish playing the game a few times, collect some responses from the students and fill in the table (It is fun to play the game the first few times. However, the teacher should stop the game and start a discussion, when she feels that the students are getting tired or bored of repeating the game).

विद्यार्थ्यांनी दिलेली उत्तरे तक्त्यात भरण्याआधी कृपया गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे (Mathematical and Pedagogical explanations) हा भाग वाचावा. विद्यार्थ्यांना काही अनुमाने सुचण्यासाठी फळ्यावरील उदाहरणांची संख्या पुरेशी आहेत ना, याची खात्री करा. Please see the section 'Mathematical and pedagogical explanations' before recording students' responses on the board. Ensure that a sufficient number of examples that help generate some conjectures, are on the board.

फळ्यावरील तक्त्यात भरलेल्या माहितीमध्ये काही आकृतिबंध दिसतो का, हे शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना विचारावे, आणि या आकृतिबंधाचे सामान्यीकरण करून अनुमान मांडायला सांगावे. प्रत्येक अनुमान फळ्यावर लिहा आणि अजून उदाहरणे घेऊन विद्यार्थ्यांना त्याची सत्यता तपासायला सांगा किंवा प्रति-उदाहरण देऊन ते नाकारता येईल का, हे विचारा. एखाद्या अनुमानाची सत्यता तपासताना कितीही उदाहरणे दिली तरी ते सिद्ध होत नाही, परंतु अनुमान नाकारायला केवळ एकच प्रति-उदाहरण पुरेसे असते, हे विद्यार्थ्यांना पटण्यासाठी शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना मदत करणे, गरजेचे आहे. विद्यार्थ्यांना त्यांची अनुमाने सिद्ध करण्यासाठी प्रोत्साहित करा.

The teacher can then invite the students to look for patterns in the filled table. Ask the students to generalize the patterns and make conjectures. Write down each conjecture on the board and encourage the students to examine whether it holds, by generating more examples, or can be refuted by generating a counter-example. Help the students see that verifying the conjecture for any number of examples does not amount to a proof, and that one counter-example is sufficient to disprove a conjecture. Encourage the students to come up with proofs of their conjectures.

विद्यार्थी अनुमान कसे मांडतात आणि अनुमानांना कसे हाताळतात हे गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे या भागात सांगितले आहे. मात्र विद्यार्थी अशीही अनुमाने मांडू शकतात, जी यादीत नाहीत. अशा वेळी एकेक अनुमान घ्या, त्याची सत्यता पडताळून बघा, नाकारा किंवा सिद्ध करा. अशा प्रक्रियांबद्दल विद्यार्थ्यांशी चर्चा करा.

Some of the conjectures that the students might come up with, and the ways to handle these are discussed in the section 'Mathematical and pedagogical explanations'. However, it is possible that students come up with conjectures that are not listed here. In this case, take the conjectures one-by-one, verify, refute or prove the conjecture as the case may be, and familiarise the students with these processes.

कृती 2: यादीतील संख्यांचा अंदाज बांधणे

Task 2: Predict the numbers in the list

समजा खेळामध्ये सुरुवातीच्या संख्या पुढीलप्रमाणे आहेत. या संख्यांपासून खेळ खेळल्यास तुमच्या यादीत कोणत्या संख्या येतील, याचा अंदाज तुम्हाला बांधता येईल का?

Let us assume that the following are the initial numbers in the game. Based on these, can you predict the numbers that you will arrive at, while playing the game?

(सूचना: उत्तर देताना अडल्यास तुम्ही बनवलेला तक्ता पहा. सुरुवातीच्या संख्या आणि यादीतील संख्या यांच्यात काही संबंध आहे का, ते पहा).

(Hint: If you are stuck, look at the table you just made. See if there is any relationship between the initial numbers and the numbers in the list.)

- सूचीतील सर्व संख्यांचा अंदाज लावा जर:
Predict all the numbers in the list if:
 - सुरुवातीच्या संख्या 9 आणि 15 असतील
The initial numbers are 9 and 15

- ii. सुरुवातीच्या संख्या 20 आणि 9 असतील
The initial numbers are 20 and 9

- iii. सुरुवातीच्या संख्या 13 आणि 17 असतील
The initial numbers are 13 and 17

- iv. सुरुवातीच्या संख्या 7 आणि 35 असतील
The initial numbers are 7 and 35

2. प्रत्येक उदाहरणासाठी कोणत्या संख्या येतील, याचा तुम्ही अंदाज कसा बांधला? या उदाहरणांमध्ये तुम्हाला काही आकृतिबंध दिसले का?
How did you predict the numbers for each example? Did you notice any patterns across the examples?

यानंतर शिक्षक यादीतील संख्या शोधताना विद्यार्थ्यांनी कोणते धोरण वापरले, या मुद्यावर चर्चा करू शकतात. चर्चेसाठी काही कल्पना 'गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे' मध्ये दिलेल्या आहेत. कृपया त्यांचा अभ्यास करा.

The teacher then can engage students in a discussion on how they can justify that their strategy for finding the numbers in the list will always work. Please study the section 'Mathematical and pedagogical explanations' for suggestions/ideas on how to lead this discussion.

3. आता, यादी मिळण्यासाठी कोणते धोरण वापरायचे आहे, हे तुम्हाला कळले आहे. तुम्ही असे धोरण सांगू शकाल का, ज्यामुळे या खेळात नेहमी एकच खेळाडू सतत जिंकेल? (कोणता खेळाडू हे धोरण वापरून नेहमी जिंकू शकतो?)
Now that you know the strategy for finding the list, can you predict a strategy that will ensure that one of the players will always win this game? (Which player can adopt this strategy and always win?)

गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे Mathematical and pedagogical explanations

वरील कृती विद्यार्थ्यांना गणिताच्या मूलभूत प्रक्रियांमध्ये उदाहरणार्थ आकृतिबंध शोधणे, अनुमान बांधणे, अनुमानाची सत्यता तपासणे किंवा नाकारणे इत्यादीमध्ये गुंतवून ठेवतात. खेळाच्या माध्यमातून गणिताच्या संकल्पना उलगडणे, हे या कृतीचे वैशिष्ट्य आहे. या खेळाची सुरुवात दोन संख्यांच्या वजाबाकीने होते. खेळ एकदा किंवा दोनदा खेळल्यानंतर विद्यार्थ्यांना त्यांच्या यादीत कोणत्या संख्या येऊ शकतात, हे लक्षात येऊ लागते. तसेच एखाद्या विद्यार्थ्याच्या हेही लक्षात येते की प्रत्येक खेळात मिळणाऱ्या संख्या या खेळाच्या सुरुवातीला निवडलेल्या संख्यांच्या जोडीवर अवलंबून असतात. आकृतिबंध शोधायला सांगितल्यावर, सुरुवातीच्या संख्येच्या जोडीचा मसावि आणि यादीत लिहिलेल्या संख्या यांच्यात काही ना काही संबंध असतो, हेही त्यांच्या लक्षात येते.

The activity helps the students engage in some fundamental practices of mathematics, such as observing patterns, making conjectures, verifying or refuting the conjectures, and so on. The novelty of the activity is in seeing how mathematical ideas emerge in the context of the game. The game begins with a simple task such as subtraction of two numbers. At the end of one or two games, the student begins to grasp that the process leads to a finite sequence of numbers. Moreover, one starts figuring out that the numbers that emerge in each game depend on the choice of the initial pair of numbers. After looking for patterns, the students will realize the connection between the HCF of the initial pair of numbers with the list of numbers obtained.

विद्यार्थ्यांच्या चर्चेतून पुढे आलेल्या निरीक्षणांचे गणितीय महत्त्व दाखवण्यासाठी, विद्यार्थी कसे वेगवेगळ्या प्रकारे विचार करू शकतात आणि त्यांची अनुमाने काय असू शकतात, हे पुढे दिलेले आहे. ‘संभाव्य अध्ययनविषयक चर्चा (Possible pedagogical discussion)’ या तक्त्यात काही अनुमानांचे स्पष्टीकरण सांगितले आहे. तसेच चर्चेसाठी काही सूचनाही केलेल्या आहेत.

To understand the mathematical significance of the students' responses, we consider below the different ways of thinking that students might exhibit and propose some conjectures that they might come up with. In the pedagogical discussion column, we provide explanations for some of the conjectures, and suggestions to lead the discussion.

विद्यार्थ्यांची निरीक्षणे Students' observations	संभाव्य अध्ययनविषयक चर्चा Possible pedagogical discussion
यादीतील सर्वात मोठी संख्या आणि संख्येच्या जोडीतील मोठी संख्या, दोन्हीही सारख्याच आहेत. The largest number in the sequence is the same as the largest number in the initial pair of numbers.	<ul style="list-style-type: none"> सुरुवातीच्या जोडीतील मोठी संख्या ही शेवटपर्यंत यादीतील सर्वात मोठी संख्या का राहते, हे विद्यार्थ्यांना विचारा. Ask for the reason why the larger initial number remains the largest number in the list till the end. स्पष्टीकरण: दिलेल्या धन संख्यांची आपण फक्त वजाबाकी करत आहोत. त्यामुळे मिळालेले उत्तर सुरुवातीच्या संख्येपेक्षा नेहमीच लहान असते. Explanation: As we are subtracting numbers in consecutive steps within the set of positive integers, the numbers obtained will always be smaller than the largest number in the initial pair of numbers.
यादीतील सर्व संख्या या त्यातील सर्वात लहान संख्येच्या पटीत असतात. The list contains only the multiples of the smallest number in the final list.	<ul style="list-style-type: none"> तक्त्यातील इतर उदाहरणे तपासून पाहायला सांगा. Ask to verify with other examples in the table. एखादे प्रति-उदाहरण सांगता येईल का, ते विचारा. Ask whether they can come up with a counter-example. या निरीक्षणामागे त्याचे स्पष्टीकरण काय असू शकेल, ते विचारा. Ask for the reason why this is the case.
संख्यांच्या सुरुवातीच्या जोडीत, जर एक संख्या दुसऱ्या संख्येची पट असेल, तर यादीतील सर्व संख्या जोडीतील लहान संख्येच्या पटीत असतात. In the initial pair of numbers, if one of the numbers is a multiple of the other, then the list contains only the multiples of the smaller initial number. उदा., सुरुवातीच्या जोडीत 7 आणि 35 असल्यास, यादीमध्ये संख्या 7 च्या पटीत दिसून येतात. E.g.: For the initial numbers, 7 and 35, the sequence obtained contains only multiples of 7.	<ul style="list-style-type: none"> विद्यार्थ्यांना, एक संख्या दुसऱ्या संख्येची पट होईल अशा काही सुरुवातीच्या संख्यांच्या जोड्या घ्यायला सांगा आणि प्रत्येक वेळी असेच घडते का, ते पडताळून पाहायला सांगा. Ask to take a few more initial pairs of numbers, where one is a multiple of the other and verify that it works every time. प्रति-उदाहरण शोधा: या अनुमानाला नाकारतील, अशा जोड्या शोधायला सांगा. मांडलेल्या अनुमानाला प्रति-उदाहरण न मिळाल्यास ते सिद्ध झाल्याचे मानता येईल का, याची विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करण्यासाठी ही एक संधी आहे. Look for a counter-example – a set of two numbers which will refute the above conjecture. This is an opportunity to discuss whether not finding a counter-example amounts to a proof of the conjecture.

विद्यार्थ्यांची निरीक्षणे Students' observations	संभाव्य अध्ययनविषयक चर्चा Possible pedagogical discussion
<p>जर सुरुवातीच्या संख्या सह-मूळ (co-prime; त्यांचा सामाईक विभाजक 1 असतो) संख्या असल्यास यादीमध्ये 1 पासून सुरुवातीच्या जोडीतील मोठ्या संख्येपर्यंत सर्व संख्या असतात.</p> <p>If the initial numbers are co-prime (i.e., 1 is the only common factor), then the list consists of all the numbers from 1 to the larger number in the initial pair of numbers</p>	<ul style="list-style-type: none"> सुरुवातीच्या जोडीमध्ये सह-मूळ संख्या असतील अशा काही जोड्या घ्या आणि प्रत्येक वेळी असे घडते का, ते पहा. Ask to take a few more initial pairs of co-prime numbers and verify that it works every time. प्रति-उदाहरण शोधा: या अनुमानाला नाकारतील, अशा जोड्या शोधायला सांगा. मांडलेल्या अनुमानाला प्रति-उदाहरण न मिळाल्यास ते सिद्ध झाल्याचे मानता येईल का, याची विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करण्यासाठी ही एक संधी आहे. Look for a counter-example – a set of two numbers which will refute the above conjecture. This is an opportunity to discuss whether not finding a counter-example amounts to a proof of the conjecture.
<p>जर सुरुवातीच्या जोडीतील संख्यांचा सामाईक विभाजक d असेल, तर यादीतील सर्वात लहान संख्या d असते.</p> <p>If the initial pair of numbers has a common factor, d, then the smallest number in the list is d.</p>	<ul style="list-style-type: none"> लक्षात घ्या, 1 हा सामाईक विभाजक असेल हे विद्यार्थ्यांच्या लक्षात येईलच, असे नाही. म्हणून या अनुमानाची चाचणी घेताना विद्यार्थी सुरुवातीची जोडी म्हणून सह-मूळ संख्या घेणार नाहीत. Note that students may not consider 1 as a common factor, and therefore while testing this conjecture they might not have co-prime numbers as the initial pair. याच प्रकारची आणखी काही उदाहरणे घ्या आणि प्रत्येक वेळी असेच घडते का, ते पहा. Ask to take a few more examples of a similar kind and verify that it works every time. जोडीतील दोन्ही संख्यांचा अजून कोणता सामाईक विभाजक आहे का, ते विचारा. अनुमानामध्ये काही बदल करायचा आहे का, ते विद्यार्थ्यांना विचारा (लक्षात घ्या, हे अनुमान सत्य नाही. आपण सुरुवातीला 12 आणि 16 या संख्या घेतल्या, या दोन्ही संख्यांचा सामाईक विभाजक 2 हा देखील आहे. परंतु ही संख्या अंतिम यादीत दिसत नाही). Ask whether the two numbers in the pair have any other common factor. Ask them whether they want to modify the conjecture. (Note that the conjecture in this particular form is not true. When we start with the initial numbers 12 and 16, 2 is a common factor of both numbers, but does not appear in the final list.) विद्यार्थ्यांना, यादीतील सर्वात लहान संख्या ही जोडीतील संख्यांची सामाईक विभाजक असते का आणि त्या संख्येबद्दल काही खास सांगता येईल का, ते विद्यार्थ्यांना विचारा. Ask them if there is anything special about the common factor that is the smallest number in the list. यादीतील सर्वात लहान संख्या ही एक खास सामाईक विभाजक का आहे, याचा विचार करा. Think about why the smallest number in the list is this particular factor.
<p>वरीलपैकी शेवटची तीन अनुमाने विद्यार्थ्यांनी दिली तर तिन्ही अनुमाने मिळून एकच अनुमान मांडण्यासाठी विद्यार्थ्यांना प्रोत्साहित करा.</p> <p>If the last three conjectures above have been articulated by the students, encourage them to come up with one conjecture that will include all these three conjectures.</p>	

विद्यार्थ्यांची निरीक्षणे Students' observations	संभाव्य अध्ययनविषयक चर्चा Possible pedagogical discussion
यादीतील सर्वात लहान संख्या ही सुरुवातीच्या दोन संख्यांची सामाईक विभाजक असते. The smallest number of the sequence is a common factor of the initial two numbers.	<ul style="list-style-type: none"> हे विधान वरच्या अनुमानांशी जुळते की वरच्या अनुमानांना चुकीचे ठरवते, ते पहा. Find out if this includes or contradicts any of the above conjectures. अनुमान योग्य शब्दात मांडा, अनुमानाची सत्यता पडताळा किंवा अनुमान नाकारा. Refine, verify, or refute the conjecture.
यादीतील सर्वात लहान संख्या ही सुरुवातीच्या दोन संख्यांची मसावि असते. The smallest number of the sequence is the HCF of the initial pair of numbers.	<ul style="list-style-type: none"> हे विधान वरच्या अनुमानांशी जुळते की वरच्या अनुमानांना चुकीचे ठरवते, ते पहा. Find out if this includes or contradicts any of the above conjectures.

तक्ता T2
Table T2

नोंद: जेव्हा विद्यार्थी त्यांची निरीक्षणे किंवा अनुमाने मांडतात तेव्हा बऱ्याचदा योग्य शब्दात मांडत नाहीत. त्यामुळे अनुमान स्पष्ट होण्यासाठी विद्यार्थ्यांना सूचक प्रश्न विचारत ते योग्य शब्दांमध्ये मांडणे गरजेचे असते. यासाठी कोणतीही निश्चित पद्धत नाही. अनुमान स्पष्ट शब्दांमध्ये मांडण्यासाठी शिक्षकांनाच अधिक प्रयत्न करावे लागतील. एकदा अनुमान स्पष्टपणे मांडले की विद्यार्थ्यांना त्याची सत्यता तपासायला किंवा ते खोडून काढायला किंवा योग्य शब्दात मांडायला सांगा. यापुढची पायरी ही अनुमान 'सिद्ध' कसे करता येईल, यावर विचार करण्याची असते.

Note: When students come up with observations and conjectures, these may not be articulated clearly enough. The teacher may need to rephrase, and ask clarifying questions to make the conjectures precise. There cannot be a standard instruction for this, and the teacher will have to think of ways of clarifying. Once a conjecture is formed, ask the students to verify, refute, or refine it. The next step is to think of a proof.



कृती 3: काही अनुमानांची सिद्धता पाहणे

Task 3: Looking for proofs of some conjectures

काही विद्यार्थ्यांनी हा खेळ खेळल्यानंतर काही रोचक निरीक्षणे नोंदवली आहेत.

Some students made these interesting observations after playing a few rounds of the game:

निरीक्षण 1: यादीतील सर्वात लहान संख्या ही सुरुवातीच्या जोडीतील संख्यांची मसावि असते.

Observation 1: The smallest number in the final list is the HCF of the initial pair of numbers.

निरीक्षण 2: यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी आहेत. तसेच यादीमध्ये लहान संख्येपासून मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटीदेखील आहेत.

Observation 2: All and only the multiples of this smallest number up to the largest number appear in the list.

1. संख्यांच्या प्रत्येक जोडीसाठी असे का होते, यासंबंधी तुम्हाला काही सांगता येईल का?

Can you figure out why this happens for every pair of numbers?

पुढील दोन निरीक्षणांबाबत चर्चा करूया.

Let us look at the two observations.

- निरीक्षण 1 असे सांगते,
Observation 1 says the following:
 - a. यादीतील सर्वात लहान संख्येने सुरुवातीच्या दोन्ही संख्यांना भाग देता येतो.
The smallest number in the list divides both the initial numbers.
 - b. सर्वात लहान संख्या ही फक्त सामाईक विभाजक नाही, तर सुरुवातीच्या दोन संख्यांचा मसावि असते.
The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.
 - निरीक्षण 2 असे सांगते :
Observation 2 implies the following:
 - a. यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी असतात.
All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list.
 - b. यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी आहेत. तसेच यादीमध्ये लहान संख्येपासून मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटी आहेत.
All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.
2. आपल्याला ही निरीक्षणे सिद्ध करायची आहेत. तुम्हाला काही मार्ग सुचतात का, ते लिहा.
We need to prove or justify these observations. Can you think of the ways of doing this?
-
-

शिक्षक विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करण्यासाठी पुढे दिलेले तर्क वापरू शकतात आणि विधाने सिद्ध करण्यासाठी मदत करू शकतात.

The teacher could use the reasoning given below to guide the discussion with the students and to help them arrive at a proof.

निरीक्षण 1 अ : यादीतील सर्वात लहान संख्येने सुरुवातीच्या दोन्ही संख्यांना भाग देता येतो.

Observation 1a: The smallest number in the list divides both the initial numbers.

निरीक्षण 1 अ ची सिद्धता :

Proof for Observation 1a:

धन संख्यांसाठी, जेव्हा आपण एखादी संख्या A दुसरी मोठी संख्या B मधून वजा ($B - A$) करतो, तेव्हा मिळालेली संख्या B पेक्षा लहान असते. आपण दोन संख्या घेऊन सुरुवात करतो आणि मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करत आपल्याला संख्या मिळतात. त्यामुळे नंतरच्या सर्व संख्या सुरुवातीच्या जोडीतील मोठ्या संख्येपेक्षा लहान असतात.

For positive numbers, whenever we subtract a number A from another (larger) number B , the result is less than B . Given that we start with two initial numbers, and form subsequent numbers by subtracting the smaller from the larger, all the numbers will be smaller than the largest number in the initial pair.

या खेळात आपण ऋण संख्या विचारात घेत नसल्याने, एका टप्प्यावर खेळ आपोआपच थांबतो. त्यामुळे यादीमध्ये सर्वात लहान संख्या असणे आवश्यक आहे आणि ती संख्या 1 असू शकते किंवा 1 पेक्षा मोठी असू शकते.

Since we are not allowing negative numbers, the game has to stop at some stage. So there exists a smallest number in the list, which may be 1 or a number greater than 1.

यादीतील सर्वात लहान संख्या S मानू. निरीक्षण 1 अ) प्रमाणे, S या संख्येने A आणि B या दोन्ही संख्यांना भाग देता येतो.

Let us call this the smallest number S . If we call the initial numbers as A and B , A being the larger of the two numbers, observation 1a claims that S divides A and S divides B .

प्रथम आपण S ने संख्या B ला भाग जातो हे सिद्ध करू.

Let us first prove that S divides B .

आता गृहीत धरा, S या संख्येने B ला भाग जात नाही, आणि B ला S ने भाग दिल्यास k बाकी मिळते.

Let assume S does not divide B .

तर $B = nS + k; k < S$ ----- भागाकाराची रीत वापरून आलेले समीकरण, यात k ही बाकी आहे.

Then $B = nS + k$ with $k < S$ ----- By applying the division algorithm with k as the remainder.

परंतु S ही संख्या यादीत आहे. म्हणून $B - nS$ पासून मिळालेली संख्या यादीत असेल --- S या संख्येला 'n वेळा' गुणून आलेली संख्या B मधून वजा केल्यावर आपल्याला वरील समीकरण मिळते.

But S belongs to the list. So $B - nS$ will also belong to the list --- we get this by subtracting S "n times" from B .

म्हणून $B - nS = k$ सुद्धा यादीत असली पाहिजे, परंतु $k < S$ आणि S ही यादीतील सर्वात लहान संख्या आहे.

So $B - nS = k$ also belongs to the list, but $k < S$ and S is the smallest number in the list.

याचा अर्थ, S ने B ला भाग जात नाही, हे आपले गृहीतक चुकीचे आहे. म्हणजेच S या संख्येने B ला भाग देता येतो.

That means our assumption that S does not divide B was wrong so, S divides B .

याचप्रमाणे, S या संख्येने A ला भाग देता येतो, हेही आपल्याला दाखवता येईल. म्हणून S ही A आणि B यांचा सामाईक विभाजक आहे.

Similarly, we can show that S divides A as well. So S is a common factor of A and B .

निरीक्षण 1 बः सर्वात लहान संख्या ही फक्त सामाईक विभाजक नाही, तर सुरुवातीच्या दोन संख्यांचा मसावि आहे.

Observation 1b: The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.

निरीक्षण 1 ब ची सिद्धता:

Proof for Observation 1b:

सिद्ध करण्यापूर्वी आपण पुढील विधान सिद्ध करू.

Let us prove a statement before we proceed with the proof of Observation 1b.

विधान (1): दोन संख्यांचा सामाईक विभाजक दोन संख्यांच्या वजाबाकीतून मिळालेल्या संख्येला विभागतो.

Statement (I): A common factor of two numbers also divides their difference.

म्हणजेच, जर q या संख्येने C आणि D या दोन्ही संख्यांना भाग देता येत असेल आणि $C > D$, तर $C - D$ या संख्येला q ने भाग जातो.

i. e. If q divides C and D and $C > D$, then q divides $C - D$.

विधानाची सिद्धता (1): q ने संख्या C आणि D यांना भाग जातो म्हणून,

Proof of Statement (I): q divides C and D would mean,

जर, $C = rq$ आणि $D = tq; r$ व t हे पूर्णांक आहेत आणि r व $t > 0$

तर $C - D = rq - tq = (r - t) \times q$

Let $C = rq$ and $D = tq$ for some integers r and $t > 0$

So, $C - D = rq - tq = (r - t) \times q$

अर्थात q ने $C - D$ ला भाग देता येतो किंवा वेगळ्या शब्दात C आणि D यांच्या फरकाचाही q हा सामाईक विभाजक आहे.

So, q divides $C - D$ and hence is a common factor of the difference between C and D .

आता आपण निरीक्षण 1 ब) कडे पुन्हा येऊ**Coming back to observation 1b**

अशा प्रकारे, आपण दोन संख्या घेऊन सुरुवात केली आणि या दोन्ही संख्यांचा सामाईक विभाजक q असेल, तर q ने त्यांच्या वजाबाकीतून आलेल्या संख्येला भाग देता येतो. यातून ही बाब सिद्ध होते की खेळाच्या पहिल्या पायरीनंतर यादीतील तिन्ही संख्यांचा सामाईक विभाजक q असतो. प्रत्येक पायरीवर, यादीतील कोणती तरी एक संख्यांची जोडी वापरली जाते आणि त्यांच्या वजाबाकीतून नवीन संख्या मिळते. जर q ही संख्या या संख्यांच्या जोडीचा सामाईक विभाजक असेल, तर q ही नवीन संख्येचा विभाजक असते. यावरून सुरुवातीच्या A आणि B या संख्यांना एखाद्या संख्येने भाग जात असेल, तर त्या संख्येने यादीतील, अगदी S सहीत, सर्व संख्यांना भाग जातो, याची पुष्टी मिळते. याचाच अर्थ, A आणि B यांचा सामाईक विभाजक S चाही विभाजक असतो.

Thus, if we start with two initial numbers and q is a common factor of both, it is also a common factor of their difference. This ensures that q is a common factor of all the three numbers in the list after the first step of the game. At every subsequent step, a pair of numbers is taken from the list and the difference written down as a new number. Thus if q is a common factor of the existing pair of numbers, it is also a factor of the new number. This ensures that if a number is a common factor of the initial numbers A and B , it is a factor of all the numbers in the list, including S . That is, any common factor of A and B , divides S .

म्हणून, सुरुवातीच्या A आणि B या संख्यांचा मसावि d असल्यास d ने S ला भाग जातो. म्हणून $d \leq S$. मात्र, S ही A आणि B यांचादेखील सामाईक विभाजक आहे, हे आपल्याला माहीत आहे (निरीक्षण 1 अ). म्हणून $S \leq d$ याचाच अर्थ $S = d$.

So, if the HCF of the initial numbers A and B is d , then d divides S and $d \leq S$. However, we know that S also is a factor of A and B (Observation 1a). Hence $S \leq d$. Therefore, we have $S = d$.

निरीक्षण 2 अ : यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी आहेत.

Observation 2a: All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.

निरीक्षण 2 अ ची सिद्धता : S ही संख्या यादीमध्ये आहे आणि A ही S ची पट आहे.

Proof for Observation 2a: S belongs to the list, and A is a multiple of S .

म्हणून, $A = f \times S$

So, $A = f \times S$

आता, S आणि $A = f \times S$, दोन्हीही यादीत आहेत.

Now S and $A = f \times S$ are both already in the list.

त्याचप्रमाणे $f \times S - S = (f - 1)S$ सुद्धा यादीत आहे.

So, $f \times S - S = (f - 1)S$ is also in the list.

त्याचप्रमाणे $(f - 1)S - S = (f - 2)S$ सुद्धा यादीत आहे.

Similarly, $(f - 1)S - S = (f - 2)S$ is also in the list.

अशा रीतीने $(f - 1)S, (f - 2)S, (f - 3)S, \dots, 3S, 2S$ सुद्धा यादीत असतील.

Continuing like this we can see that, $(f - 1)S, (f - 2)S, (f - 3)S, \dots, 3S, 2S$ also belong to the list.

निरीक्षण 2 ब : यादीतील मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटी दिसून येतात.

Observation 2b: All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list

निरीक्षण 2 ब साठी सिद्धता : निरीक्षण 1a च्या सिद्धतेसाठी वापरलेले विधान वापरून आपल्याला S ही सर्वात लहान संख्या मिळते आणि ती यादीतील प्रत्येक संख्येला विभागते.

Proof for Observation 2b: Using the same argument used in the proof of Observation 1a, we get that the smallest number, S divides any number in the list.

युक्लिडच्या कार्यावलीचा संबंध Relation to the Euclidean algorithm

समजा, आपण खेळाचे नियम बदलले. मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करण्याऐवजी, आपण मोठ्या संख्येतून लहान संख्येची कोणतीही पट वजा करू शकतो आणि पुढच्या पायरीवर, जी पट वापरली आहे आणि वजाबाकीतून ज्या संख्या मिळाल्या आहेत, त्यांवर तीच क्रिया करू शकतो. यालाच युक्लिडची कार्यावली म्हणतात. आता हा खेळ आणि युक्लिडची कार्यावली कशी काम करते, ते आपल्याला समजले का?

Imagine you change the rules of the game:

Instead of subtracting the smaller number from the largest, you could subtract a multiple of the smaller number from the larger. And then in the next step do the same with the multiple used and the number remaining after the subtraction. This, then, is the Euclidean algorithm for you! So, can you see why the game and therefore the Euclidean algorithm works?



विचारात घेण्याच्या बाबी Points to ponder

1. संख्यांची कोणतीही जोडी वापरून जिंकता येते का? नसल्यास, संख्यांच्या कोणत्या जोड्या वापरून जिंकता येईल?
Do all pairs of numbers allow for a winning strategy? If not, what kinds of numbers will allow for a winning strategy?
2. समजा हा खेळ तीन जणांनी मिळून खेळला आणि तीन संख्या घेऊन सुरुवात केली तर काय होईल?
What happens if you allow for the first three numbers to be random? Say, by making it a three-player game?



पुढील संज्ञांबाबत चर्चा करा Terms to discuss

गणिताची प्रक्रिया, अनुमान, प्रति-उदाहरण, अनुमाने यांसंबंधी माहिती देणे.

Process of mathematics, conjecture, counter example, reporting a conjecture, etc.



अधिक वाचनासाठी Suggested Readings

- Euclid's Algorithm I: <https://nrich.maths.org/1357/index>
- Euclid's Algorithm II: <https://nrich.maths.org/1728>
- Euclid's Algorithm III: <https://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml>

संदर्भ References

- Euclid's Game: <https://www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml>
- The optimal strategy in Euclid's game: <https://math.stackexchange.com/questions/754461/optimal-strategy-in-euclids-game>