LU 8.11. An experiment on measuring volumes
आयतन मापने पर एक प्रयोग

Overview
रूपरेखा

The story of crow and the pitcher (a kind of pot for holding water) from the collection of Aesop's Fables is very popular among children. Using this simple story, we can explore the concept of volume of solids and liquids with the students. In this Learning Unit, students learn how to estimate the volumes of different bodies by immersing them in water. We also introduce the idea of the packing of solids, i.e., when you try to pack together (or put together) many solid objects, there may be some gaps in between. Due to this property of solids, the crow may not be successful in raising the level of water beyond a certain limit.
ईसप की दंतकथाओं के संग्रह से कौए और घड़े (पानी रखने का एक प्रकार का बर्तन) की कहानी बच्चों में बहुत लोकप्रिय है। इस सरल कहानी के द्वारा हम छात्रों के साथ ठोस और तरल पदार्थों के आयतन की अवधारणा (concept) की जाँच कर सकते हैं। इस शैक्षिक इकाई में छात्र सीखते हैं कि विभिन्न वस्तुओं को जल में डुबाकर उनके आयतन का आकलन किस प्रकार किया जा सकता है। यहाँ हम ठोस पदार्थों के संकुलन के बारे में भी बात करेंगे। जब आप कई ठोस वस्तुएँ एक साथ जमाने का प्रयास करते हैं तो उनके बीच में कुछ दूरी रह जाती है। ठोस पदार्थों के इसी गुण के कारण कौआ पानी का स्तर एक निश्चित सीमा से ऊपर नहीं बढ़ा सकता।

Minimum time required
आवश्यक न्यूनतम समय

Three sessions of 40 mins each.
40-40 मिनट के तीन सत्र।

Type of Learning Unit: Classroom
अधिगम इकाई का प्रकार: कक्षा में करने के लिए

Unit-specific objectives
इकाई विशेष के उद्देश्य

- To make a marked transparent cylinder and use it to measure the volume of liquids,
  एक चिन्हित पारदर्शी सिलेंडर बनाना तथा तरल पदार्थों का आयतन मापने के लिए इसका उपयोग करना,
- To use the volume of fluid displaced by submerged bodies to measure the volume of solids that do not dissolve in water,
  अघुलनशील ठोस पदार्थ को जल में डुबोने के बाद उसके द्वारा विस्थापित द्रव की मात्रा से उस पदार्थ का आयतन मापना,
- To understand the importance of the least count of a measuring instrument, and its use in finding the accuracy of volume measurement,
  किसी मापक यंत्र के अल्पतमांक के महत्व तथा आयतन माप की यथार्थता के लिए इसके उपयोग को समझना,
- To develop an intuitive understanding of the concept of packing fraction.
  पैकिंग फ्रेक्शन की अवधारणा की सहज समझ विकसित करना।

Links to curriculum
पाठ्यक्रम से संबंध

NCERT Class 7 Science	NCERT Class 8 Mathematics

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

एनसीईआरटी कक्षा 7 विज्ञान	एनसीईआरटी कक्षा 8 गणित
Chapter 9 : Soil (Feb 2006) **अध्याय 9:** मृदा (Relates to the concept of water that can be held in pore spaces of soil/rock pieces) (मृदा/शिलाखंडों के बीच के सूक्ष्म रिक्त स्थान में उपस्थित जल की अवधारणा से संबंधित)	**Chapter 9:** Mensuration (Nov 2022) **अध्याय 9:** क्षेत्रमिति (The formulas from this chapter are not directly required here, but this unit helps students internalise some of the ideas of volume measurments) (इस अध्याय के सूत्रों की यहां सीधे आवश्यकता नहीं हैं, लेकिन यह इकाई आयतन मापन की कुछ अवधारणाओं को आत्मसात करने में छात्रों की मदद करती है)

Learning from "The crow and the pitcher" story
"कौए और घड़े" की कहानी से सीख

Do you remember the childhood fable of the crow and the pitcher? (See figure 1.) In this unit, we will imitate the crow in the story and use the concept that 'a body submerged in water displaces an amount of water equivalent to its volume', to carry out some measurements. The last task in this unit is closely related to the tale — and you may reach a surprising conclusion at the end of it!

क्या आपको बचपन की कौए और घड़े की कहानी याद है? (चित्र 1 देखें) इस इकाई में हम वही करेंगे जो कहानी में कौए ने किया था। 'किसी पिंड को पानी में डुबोने पर वह अपने आयतन के बराबर पानी के आयतन को विस्थापित करता है' इस अवधारणा का उपयोग हम कुछ वस्तुओं के आयतन को मापने के लिए करेंगे। इकाई का अंतिम कार्य इस कहानी से जुड़ा हुआ है और इसके अंत में आप एक आश्चर्यजनक निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं।

Figure 1: The Crow and the Pitcher
चित्र 1: कौआ और घड़ा

Materials

सामग्री

- A narrow transparent cylinder (or a transparent 500 mL water bottle with the top cut off; the cylinder need not have uniform diameter across its length)
  एक संकीर्ण पारदर्शी सिलेंडर (या एक पारदर्शी 500 मिलीलीटर पानी की बोतल, जिसका ऊपरी हिस्सा काट दिया गया हो; सिलेंडर की पूरी लम्बाई में एक समान व्यास का होना आवश्यक नहीं है)
- Glass marbles (~40) of similar size
  समान आकार के काँच के कंचे (लगभग 40)
- Small irregular stone which can fit into the cylinder comfortably (see note in task 4)
  छोटा अनियमित आकार का पत्थर जो सिलेंडर में आराम से आ सकता है (कार्य 4 में दी गई टिप्पणी देखें)
- Ruler (2)
  पैमाना (दो)
- Marker pen (fine tipped)
  मार्कर पेन (बारीक सिरे/नोक वाला)
- Straight edge (like another ruler or edge of a notebook)
  सीधा किनारा (जैसे कि कोई दूसरा पैमाना या नोटबुक का किनारा)
- Beaker (with graduated volume markings)
  बीकर (आयतन मापन के लिए अंशांकित)
- A tray or trough may be kept to collect water spills.
  बीकर से बाहर बहकर आने वाले पानी को इकट्ठा करने के लिए एक ट्रे या छोटा टब।

Are you familiar with these ideas?
क्या आप इन विचारों से परिचित हैं?

- Volume
  आयतन

Students should be familiar with the concept of volume in general and also the formula for volume of a sphere.
छात्र सामान्यत: आयतन की अवधारणा तथा गोले के आयतन के सूत्र से परिचित होंगे।

- Displacement of fluids by solid objects
  ठोस वस्तुओं द्वारा तरल पदार्थों का विस्थापन

Students should be aware that when a non-porous solid body is immersed in a fluid, it displaces fluid equal to its own volume. Familiarity with the Archimedes' principle of buoyancy is not necessary for this task.
छात्र इस तथ्य से परिचित होंगे कि जब एक रंध्रहीन ठोस पिंड को किसी तरल पदार्थ में डुबोया जाता है तो वह अपने आयतन के बराबर तरल विस्थापित करता है। इस कार्य के लिए आर्किमिडीज के उत्प्लावन सिद्धांत से परिचित होना आवश्यक नहीं है।

- Average/ Mean
  औसत / मध्यमान

Students should be familiar with the concept of the average of several quantities.
छात्रों को विभिन्न राशियों के औसत की अवधारणा से परिचित होना चाहिए।

Task 1: Creating your own volume measuring instrument (a graduated cylinder)

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

कार्य 1: अपना स्वयं का आयतन मापक उपकरण (अंशांकित सिलेंडर) बनाना

i. Use a beaker to carefully measure 50 mL water and transfer it to the transparent cylinder. Mark the height of the water column on the cylinder using a marker pen.
बीकर के द्वारा 50 mL पानी को सावधानीपूर्वक मापें और पारदर्शी सिलेंडर में डालें। मार्कर पेन से सिलेंडर में पानी के स्तर को चिह्नित करें।

ii. Repeat this till the cylinder is almost full, marking successive heights at the steps of 50 mL.
बीकर की सहायता से सिलेंडर में 50 mL पानी और डालें। अब पानी के स्तर को पुनः चिन्हित करें। यह क्रम तब तक दोहराएं जब तक कि सिलेंडर लगभग पूरा न भर जाए।

iii. Label the markings with appropriate multiples of 50 mL (50 mL, 100 mL, 150 mL,...).
50 mL के उपयुक्त गुणकों से पानी के स्तर के चिह्नों को नामांकित करें (जैसे 50 mL, 100 mL, 150 mL,...)।

Now, you have a graduated cylinder which measures volume. You will notice that we can use this cylinder to measure volume only in multiples of 50 mL. Hence 50 mL is the least count of this graduated cylinder. If the water level is between two markings, we take the reading as the mark that is closest to the water level.
अब, आपके पास एक अंशांकित सिलेंडर है जो आयतन मापता है। आप देख सकते हैं कि इस सिलेंडर का उपयोग हम केवल 50 mL के गुणकों में ही आयतन मापने के लिए कर सकते हैं। इसलिए इस अंशांकित सिलेंडर का अल्पतमांक 50 mL है। यदि जल स्तर दो चिह्नों के बीच है, तो हम पानी के स्तर का माप उस चिह्न को ले लेते हैं जो जल स्तर के सबसे करीब है।

The maximum volume your graduated cylinder can measure is _____
(Highest marking on the cylinder)
आपके अंशांकित सिलेंडर द्वारा मापा जा सकने वाला अधिकतम आयतन _____ है
(सिलेंडर पर चिन्हित उच्चतम अंकन)

- Here it would be useful to discuss the concept of least count with the students. In this context, the least count would be 50 mL.
यहां छात्रों के साथ अल्पतमांक की अवधारणा पर चर्चा करना उपयोगी होगा। इस संदर्भ में अल्पतमांक 50 mL होगा।
- In task 4, we will see how to increase the accuracy of this graduated cylinder beyond the current least count.
कार्य 4 में हम देखेंगे कि इस अंशांकित सिलेंडर की यथार्थता को वर्तमान अल्पतमांक से बेहतर कैसे बनाएं।
- The graduated cylinders prepared by the students in this task can also be reused for other experimental purposes.
छात्रों द्वारा इस कार्य के लिए तैयार किए गए अंशांकित सिलेंडरों का उपयोग अन्य प्रयोगों के लिए भी किया जा सकता है।
- You may make suitable modifications to the instructions above. For example, if there is a beaker which measures 25 mL instead of 50 mL, then the transparent cylinder could have markings for every 25 mL. However, reducing this least count of the cylinder should be avoided as it may increase error in measurements because of non-uniformity in shape of the bottle and errors in making marks. Lower least count of this cylinder may also prompt students to take fewer number of marbles, which will lead to measuring volume change for lesser number of marbles increasing the relative error in volume per marble.
आप उपरोक्त निर्देशों में उपयुक्त संशोधन कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, अगर आपके पास 50 mL के बजाय 25 mL का बीकर है तो पारदर्शी सिलेंडर पर हर 25 mL के लिए अंशांकन किया जा सकता है। हालांकि सिलेंडर के अल्पतमांक को कम करने से बचना चाहिए क्योंकि बोतलों के असमान आकार तथा उन पर बनाये गये चिन्हों में त्रुटियों के कारण आयतन मापने में त्रुटि बढ़ सकती है। कम अल्पतमांक छात्रों को कम संख्या में कंचे लेने के लिए प्रेरित कर सकता है, जिससे प्रति कंचे आयतन के मापन में तुलनात्मक त्रुटि बढ़ सकती है।

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

- Some labs may have a graduated beaker, or a graduated transparent cylinder, which is already marked. If the beaker or cylinder is large enough it could be used directly by one of the student groups. But do encourage the students to also prepare their own measuring cylinder. The results obtained with the marked cylinder and the beaker could then be compared. Before beginning, ask the students to observe the graduated beaker carefully and find its least count.
  कुछ प्रयोगशालाओं में पहले से ही अंशांकित बीकर या पारदर्शी सिलेंडर हो सकते हैं। अगर बीकर या सिलेंडर काफी बड़ा है तो इसका उपयोग एक छात्र समूह द्वारा किया जा सकता है। लेकिन छात्रों को अपना स्वयं का मापक सिलेंडर बनाने के लिए भी प्रोत्साहित करें। फिर अंशांकित सिलेंडर और बीकर से प्राप्त परिणामों की तुलना की जा सकती है। कार्य शुरु करने से पहले, छात्रों को अंशांकित बीकर को ध्यान से देखने और उसका अल्पतमांक ज्ञात करने के लिए कहें।

Task 2: Measuring the average volume of marbles

कार्य 2: कंचो के औसत आयतन का मापन

i. Take the empty graduated cylinder and fill it up to the 200 mL mark.
खाली अंशांकित सिलेंडर लें और इसे 200 mL के चिन्ह तक पानी से भरें।

ii. Drop the marbles in the cylinder, one by one while counting them, until the water level rises up to the next mark. Ensure that all the marbles are fully submerged in water. That is, the level of the water should be above all the marbles. The water level rises because each marble displaces an amount of water equal to its own volume.
एक-एक करके गिनते हुए सिलेंडर में कंचे गिराएं जब तक कि पानी का स्तर अगले चिन्ह तक ऊपर न उठ जाए। सुनिश्चित करें कि सभी कंचे पूरी तरह से पानी में डूबे हुए हैं। अर्थात, पानी का स्तर सभी कंचो से ऊपर होना चाहिए। मार्बल डालने से सिलेंडर में पानी का स्तर बढ़ जाता है क्योंकि प्रत्येक कंचा अपने आयतन के बराबर पानी की मात्रा को विस्थापित करता है।

Volume of water before adding marbles _____
कंचे डालने से पहले पानी का आयतन_____

Volume of water after adding marbles _____
कंचे डालने के बाद पानी का आयतन_____

Number of marbles required to raise the water level to the next mark _____
अगले चिन्ह तक पानी का स्तर बढ़ाने के लिए आवश्यक कंचो की संख्या _____

Thus, _____ marbles displace _____ volume of water.
इस प्रकार, _____कंचे पानी के _____ आयतन को विस्थापित करते हैं।

iii. Use this result to estimate the average volume of one marble, obtained experimentally (V_{exp}).
प्रयोग के इस परिणाम से कंचे के औसत आयतन (V_{exp}) का प्रयोगात्मक रूप से अनुमान लगाएँ।

Average volume of one marble_____
एक कंचे का औसत आयतन_____

- It is possible that the students may not get the water level exactly up to a mark on the transparent cylinder. If the water level is below a certain mark, for say 20 marbles and goes above this mark for 21 marbles, then in such case, the number of marbles making up the difference in volume may be taken as 20 or 21 depending on if the 21st marble is submerged more or less than half and closeness of water level to the mark.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

यह संभव है कि छात्रों को पारदर्शी सिलेंडर में पानी का स्तर ठीक से किसी निशान तक न मिले। उदाहरण के लिए यदि 20 कंचो के लिए पानी का स्तर एक निश्चित निशान से कम है, और 21 कंचो के लिए इस निशान से ऊपर जाता है, तो ऐसे मामलों में विस्थापित पानी के आयतन के लिए कंचो की संख्या 20 ली जाएगी या 21, यह इस बात पर निर्भर करता है कि 21 वां कंचा आधे से कम डूबा हुआ है या अधिक, और पानी निशान के कितना निकट है।

- Moreover, the topmost marbles must be submerged while measuring volume. If there are air spaces between the top marbles, some marbles may be removed till such spaces are no more observed. Altenatively, the task may be repeated with a larger starting volume of water.
इसके अलावा आयतन को मापते समय सबसे ऊपरी कंचा डूबा होना चाहिए। अगर सबसे ऊपर के कंचों के बीच रिक्त स्थान हैं तो कुछ कंचों को हटाया भी जा सकता हैं जब तक कि इस तरह के रिक्त स्थान दिखाई देने बंद नहीं हो जाते। अन्यथा इस कार्य को पानी की ज्यादा मात्रा के साथ दोबारा किया जा सकता है।
- The students may be given a hint to first obtain the volume for “n” marbles in this task and then the average volume of one marble. Note that all the marbles are nearly equal in volume, but not exactly equal. This is why it makes sense to talk an average volume and take it as an estimate of the volume of one marble.
इस कार्य में छात्रों को यह संकेत दिया जा सकता है कि वे पहले "n" कंचों का आयतन निकालें और फिर एक कंचे का औसत आयतन निकालें। ध्यान दें कि सभी कंचे आयतन में लगभग बराबर हैं, लेकिन बिल्कुल बराबर नहीं हैं। यही कारण है कि एक कंचे के आयतन के तौर पर औसत आयतन को लेना बेहतर है।
- When we performed this task, the result we obtained for the set of marbles that we had was about 50 mL for 25 marbles, which meant that the average volume of one marble was about 2 mL.
जब हमने इस कार्य को किया, तो दिए गए कंचों के सेट के लिए जो परिणाम हमें प्राप्त हुआ वह 25 कंचों के लिए लगभग 50 mL था, जिसका मतलब है कि एक कंचे का औसत आयतन लगभग 2 mL था।

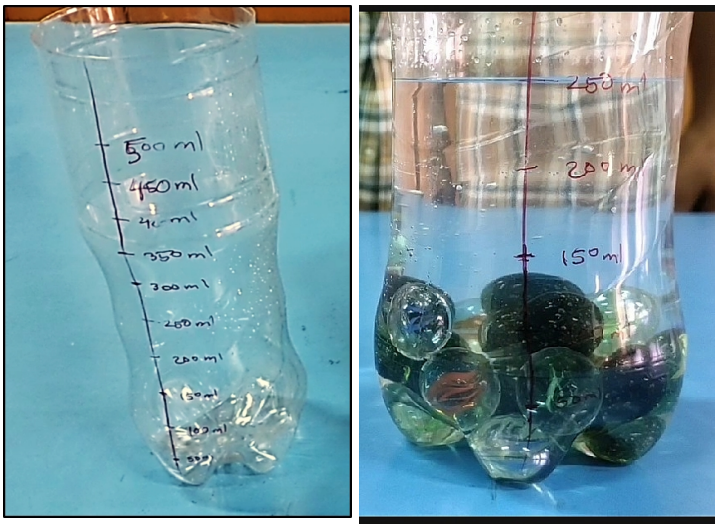

Figure T1: *(Left) A measuring cylinder and (right) A measuring cylinder with water and marbles*

चित्र T 1 *: (बाँया) एक मापक सिलेंडर; तथा (दाँया) एक मापक सिलेंडर में पानी और कंचे*

Task 3: Comparing the volume of a marble estimated by two different methods

कार्य 3 : दो अलग-अलग विधियों से ज्ञात किए गए कंचों के आयतनों की तुलना

i. Keep ten marbles in a straight line touching each other. (You can create a long narrow channel by placing a straight edge and a ruler parallel to one another with a gap in between, with the marbles lined up in the gap.)
दस कंचों को एक-दूसरे से स्पर्श करते हुए एक सीधी रेखा में रखें। आप दो पैमानों (अथवा एक पैमाना और एक नोटबुक का सीधा किनारा) को एक दूसरे के समानांतर रखकर एक संकीर्ण चैनल बना सकते हैं और बीच के अंतराल में ये कंचे रेखाबद्ध रख सकते हैं।

ii. Measure the end-to-end length of the line of marbles.
कंचों की रेखा के एक सिरे से दूसरे सिरे तक की लंबाई को मापें।

End-to-end length of ten marbles _____
दस कंचों की एक सिरे से दूसरे सिरे तक की लंबाई_____

iii. Use this measurement to estimate the average radius of the marbles.
इस माप का उपयोग एक कंचे की औसत त्रिज्या का अनुमान लगाने के लिए करें।

Average radius of one marble _____
एक कंचे की औसत त्रिज्या _____

iv. Calculate the volume of a marble (sphere) using the radius you have obtained.
अपने द्वारा ज्ञात की गई त्रिज्या का उपयोग करके एक कंचे (गोले) के आयतन की गणना करें।

Volume of one marble (obtained using the formula) _____
(सूत्र का उपयोग करके प्राप्त) एक कंचे का आयतन_____

v. You may notice that the volumes obtained by these two methods differ slightly from each other. One can estimate percentage difference as the ratio (expressed in percentage) of the difference in volume to the volume of a marble (by either method).
आप देख सकते हैं कि इन दोनों विधियों द्वारा ज्ञात आयतनों के परिणामों में थोड़ा अंतर है। इन दो मानों में प्रतिशत अंतर का आकलन आप आयतनों में अंतर तथा (किसी भी विधि द्वारा प्राप्त) एक कंचे के आयतन के अनुपात में व्यक्त कर सकते हैं।

Percentage difference = _____
प्रतिशत अंतर = _____

- Dividing the end-to-end length by the number of marbles will give the mean diameter of the marbles. Have a discussion with the students on whether the diameter of each marble is exactly equal to the answer they wrote. If not, what does this answer signify?
एक सिरे से दूसरे सिरे तक की लंबाई को कंचों की संख्या से विभाजित करने से कंचों का औसत व्यास मिलेगा। छात्रों के साथ इस बात पर चर्चा करें कि क्या प्रत्येक कंचे का व्यास उनके द्वारा लिखे गए उत्तर के बराबर है। यदि नहीं, तो यह उत्तर क्या दर्शाता है?

- For our set of marbles, the end-to-end length of the line of marbles was (for 10 marbles) ~ 15.1 cm, i.e., the average diameter of a marble was about 1.51 cm. This gives the volume of one marble as $\frac{4}{3}\pi r^3 = (\frac{4}{3}) \times (\frac{22}{7}) \times (\frac{1.5}{2})^3$ = 1.77 mL.
हमारे 10 कंचों के लिए, कंचों की पंक्ति की एक सिरे से दूसरे सिरे तक की लंबाई लगभग 15.1 cm थी। अर्थात, एक कंचे का औसत व्यास लगभग 1.51 cm था। इससे हमें एक कंचे का आयतन निम्न सूत्र से प्राप्त होता है : $\frac{4}{3}\pi r^3 = (\frac{4}{3}) \times (\frac{22}{7}) \times (\frac{1.5}{2})^3$ = 1.77 mL.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

- The expression for the percentage difference can be written as: $\frac{|V_{calc} - V_{exp}|}{(V_{calc} \text{ OR } V_{\exp})} \times 100\ \%$

  प्रतिशत अंतर को निम्न रूप से दर्शाया जा सकता है: $\frac{|V_{calc} - V_{exp}|}{(V_{calc} \text{ OR } V_{\exp})} \times 100\ \%$
- We are using the percentage difference instead of percentage error, because among the two methods, we cannot say which is the accurate measurement. Both methods have inherent possibility of measurement errors.
  हम प्रतिशत त्रुटि के स्थान पर प्रतिशत अंतर का उपयोग कर रहे हैं क्योंकि हम यह नहीं कह सकते कि उपरोक्त दो विधियों द्वारा प्राप्त मानों के बीच में कौन-सा सही माप है। दोनों ही विधियों में आयतन मापने में त्रुटि होने की संभावना अंतर्निहित है।
- The teacher can explain the concept of error qualitatively as follows: There is a clear discrepancy in the volume of one marble obtained in task 2 and that obtained in task 3. This is because in task 2, we calculate the average volume of one marble directly without finding the radius of marbles. On the other hand, in task 3, we find the average radius of a marble and then calculate the volume. In this process, any error in the measurement of the radius leads to larger error in volume as the radius gets cubed (due to $\frac{4}{3}\pi r^3$). This error can be minimised by increasing the number of marbles taken to measure the end-to-end length and then calculating the corresponding average radius of one marble.
  शिक्षक त्रुटि की अवधारणा को गुणात्मक रूप में निम्नवत समझा सकते हैं: कार्य 2 तथा कार्य 3 से ज्ञात किये गए एक कंचे के आयतन में स्पष्ट विसंगति है। यह विसंगति इसलिए है क्योंकि कार्य 2 में, हम कंचे की त्रिज्या ज्ञात किए बिना ही सीधे एक कंचे का औसत आयतन निकाल लेते हैं जबकि कार्य 3 में हम पहले एक कंचे की औसत त्रिज्या ज्ञात करते हैं और फिर उसका आयतन निकालते हैं। इस प्रक्रिया में, त्रिज्या के मापन में यदि कोई त्रुटि होती है तो आयतन मापने में उससे भी बड़ी त्रुटि होती है, क्योंकि, आयतन मापने के सूत्र में त्रिज्या का घन (घात 3) प्रयोग किया जाता है। इस त्रुटि को कम करने के लिए एक कंचे की औसत त्रिज्या निकालने के लिए ज्यादा संख्या में कंचे लिए जा सकते हैं।
- Note that the mean volume of marbles is obtained here to a greater accuracy than the accuracy imposed by the least count of our "manufactured" measuring cylinder.
  ध्यान दें कि यहाँ कार्य 3 से प्राप्त कंचों का औसत आयतन कार्य 2 में बनाये हुए अंशांकित सिलेंडर के अल्पतमांक से तय यथार्थता की सीमा से अधिक पाया गया है।
- Possible extension: If the students want, they can repeat this with more marbles and/or with random sets of ten marbles each. Will the calculated average volume now be closer to that obtained in task 2?
  संभावित विस्तार: छात्र यदि चाहें तो वे और अधिक कंचे लेकर और/अथवा अपनी इच्छा से चुने गए दस-दस कंचों को लेकर कार्य को दोहरा सकते हैं। क्या इस तरीके से प्राप्त औसत आयतन का मान कार्यकलाप 2 में प्राप्त मान के अधिक निकट होगा?
- Possible extension: Students may also try repeating the tasks 2 and 3 using machined steel balls (like those used in ball bearings) of a size similar to that of the marbles. Since these are usually manufactured to a higher degree of precision than the marbles, the discrepancy in the volume obtained in task 2 and that obtained in task 3 will be smaller.
  संभावित विस्तार: छात्र कार्य 2 व 3 को कंचों के समान माप की मशीन निर्मित स्टील की गोलियां (वैसी जैसी बॉल बेयरिंग में उपयोग में आती हैं) लेकर भी दोहरा सकते हैं। क्योंकि ये प्रायः कंचों की तुलना में उच्च कोटि की परिशुद्धता के साथ बनायी जाती हैं, इसलिए कार्य 2 व 3 से प्राप्त आयतन के मानों में विसंगति कम पाई जाएगी।

Task 4: Measuring the volume of an irregular stone

कार्य 4: एक अनियमित आकार के पत्थर के आयतन को मापना

i. Fill the cylinder with water to the 200 mL mark.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

सिलेंडर को 200 mL के निशान तक पानी से भरें।

ii. Put an irregular stone in the water. (The stone should be completely immersed inside the water with the water level at least 2-3 cm above the upper surface of the stone.)
पानी में एक अनियमित पत्थर डालें। (पत्थर पूरी तरह से पानी के अंदर डूब जाना चाहिए और पानी का स्तर पत्थर की ऊपरी सतह से कम से कम 2-3 cm ऊपर रहना चाहिए।)

iii. Estimate the volume of the stone by observing the amount of water displaced. Unless the water level matches with one of the markings, this will only be an approximate measurement.
विस्थापित पानी की मात्रा का निरीक्षण करके पत्थर के आयतन का आकलन कीजिए। जब तक जल- स्तर सिलेंडर पर लगे चिह्नों में से किसी एक चिन्ह को पूर्णत: नहीं छूता तब तक यह माप केवल एक अनुमानित माप माना जायेगा।

iv. Now, immerse enough marbles to bring the water level up to the next marking.
अब, पानी के स्तर को अगले चिन्ह तक लाने के लिए इसमें पर्याप्त संख्या में कंचे डालें।

Volume of water before adding the stone _____
पत्थर डालने से पहले सिलेंडर में जल का स्तर _____

Number of marbles required to raise the water level to the next mark _____
अगले चिन्ह तक जल स्तर बढ़ाने के लिए आवश्यक कंचों की संख्या_____

The irregular stone + _____ marbles displaced _____ volume of water.
अनियमित पत्थर + _____ कंचों द्वारा पानी के विस्थापित आयतन का मान _____

v. Use the mean volume of marbles, V_{exp} obtained in task 2 to determine the volume of the stone more precisely.
पत्थर का आयतन अधिक सटीकता से ज्ञात करने के लिए कार्य 2 में प्राप्त किए गए कंचों के औसत आयतन V_{exp} का उपयोग करें।

Volume of the irregular stone _____
अनियमित आकार के पत्थर का आयतन _____

Note that once the stone is submerged, there needs to be sufficient depth of water above the stone to immerse a few marbles completely. If this is not the case the teacher may consider restarting with a larger amount of water.
ध्यान दें कि जल में पत्थर डूब जाने के बाद, पानी का स्तर इसके इतना ऊपर तो होना ही चाहिए कि उसमें कुछ और कंचे पूरी तरह डूब सकें। अगर ऐसा न हो तो शिक्षक पानी की अधिक मात्रा के साथ कार्य दोबारा करने पर विचार कर सकते हैं।

Task 5: A challenge
कार्य 5: एक चुनौती

In this task the students confront their belief that by putting enough number of marbles, the water level will always rise to the top of the container. They may be surprised that this is not the case. The main reason for this, which the students will discover through this task, is that there are gaps between the marbles, even when they are closely packed and the amount of water may be just sufficient to fill these gaps without rising above the level of the marbles.
इस कार्य में छात्रों को अपनी इस धारणा का आकलन करना होगा कि पर्याप्त संख्या में कंचे डालकर पानी का स्तर हमेशा बर्तन/सिलेंडर के ऊपरी किनारे तक उठाया जा सकता है। वे यह देखकर आश्चर्यचकित हो सकते हैं कि वास्तव में ऐसा नहीं होता है। छात्र इस कार्य के माध्यम से यह जानेंगे कि, कंचों को अगर सटा-सटा कर रखा हो तब भी उनके बीच में रिक्त स्थान/अंतराल होता है और पानी कंचों के स्तर से ऊपर उठे बिना कंचों के बीच के अंतराल में ही रह जाता है।

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

1) Fill up the cylinder with water to the 50 mL mark.
सिलेंडर को 50 mL के निशान तक पानी से भरें।

2) By adding enough marbles, try to raise the water level to the top of the cylinder.
पर्याप्त संख्या में कंचे डाल कर, पानी के स्तर को सिलेंडर के शीर्ष तक लाने की कोशिश करें।

3) If you do not succeed in raising the water level to the top, note the highest marking to which the water level rises.
यदि आप जल स्तर को शीर्ष तक लाने में सफल नहीं होते हैं तो उस उच्चतम स्तर को लिखे, जहां तक जल स्तर बढ़ता है।

Maximum marking to which the water level rises _____
अधिकतम चिन्ह जिस तक जल स्तर बढ़ा _____

Number of marbles required to increase the volume by this amount _____
इस चिन्ह तक आयतन बढ़ाने के लिए आवश्यक कंचों की संख्या _____

4) Can you think of an explanation for this?
क्या आप इसके लिए कोई स्पष्टीकरण सोच सकते हैं?

_____

_____

_____

5) Do you think the thirsty crow would have succeeded in quenching its thirst? Explain your answer.
क्या आपको लगता है कि प्यासा कौआ अपनी प्यास बुझाने में सफल रहा होगा? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

_____

_____

_____

- The initial volume of water is kept deliberately low so that adding more and more marbles does not bring the water level up to the top. Once this happens, the teacher may support the students in finding the explanation that when objects like marbles are packed as closely as possible, they still have some gaps in between. The water accumulates there and hence never rises above a certain level. Assuming the closest possible packing of the marbles, there is still about a quarter of volume between the marbles that is left over for air or water. Thus, in this task, if the initial volume of water was 50 mL, the water level after adding many marbles will not rise beyond 200 mL. The teacher may also point out to the more interested students that this concept is called the “packing fraction”. Similar concept also becomes important in the theory which explains how atoms are packed together in solids.
पानी की प्रारंभिक मात्रा जानबूझकर कम रखी जाती है ताकि अधिक से अधिक संख्या में कंचे डालने पर भी पानी शीर्ष तक ऊपर नहीं उठे। एक बार ऐसा होने पर, शिक्षक छात्रों को यह समझा सकते हैं कि कंचों जैसी वस्तुएं यदि सटा-सटा कर रखी हों, तब भी उनके बीच में कुछ अंतराल रहता है। इन्हीं अंतरालों में पानी जमा हो जाता है और इसलिए एक निश्चित स्तर से ऊपर कभी नहीं बढ़ता है। कंचों की सर्वाधिक संभव सघन पैकिंग होने पर भी कंचों के बीच लगभग एक-चौथाई आयतन अभी भी हवा या पानी के लिए बचा रहता है। इस प्रकार, इस कार्य में, यदि पानी का प्रारंभिक आयतन 50 mL था, तो अनेक कंचे डालने के बाद भी जल का स्तर 200 mL से आगे नहीं बढ़ेगा। शिक्षक इस अवधारणा के प्रति इच्छुक छात्रों को यह भी बता कर सकते हैं कि यह संकल्पना "संकुलन गुणांक या पैकिंग फ्रैक्शन" कहलाती है। इसी तरह की संकल्पना उस सिद्धांत में भी महत्वपूर्ण हो जाती है जिसमें ठोस पदार्थों में परमाणुओं की व्यवस्था समझी जाती हैं।
- Thus, one of the takeaways of this unit is that the thirsty crow would not have succeeded in quenching its thirst if the water level in the pitcher had been too low to begin with.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

इस प्रकार, इस इकाई के निष्कर्षों में से एक यह है कि अगर शुरू में घड़े में पानी का स्तर बहुत कम रहा होगा, तो प्यासा कौआ अपनी प्यास बुझाने में सफल नहीं हुआ होगा।

- Only for the teachers: In case of (spherical) marbles, the closest possible packing is called “hexagonal close packed”. The packing fraction for this is = ~ 0.74. This means that in the most ideal closest packing, 74% of the volume will be occupied by marbles and at most 26% by water. Further, on the edges of the cylinder, this fraction will be poorer. Hence, we expect water in the above task to rise to between 120-150 mL.
  केवल शिक्षकों के लिए: गोल कंचों के लिए, सघनतम संभव पैकिंग "षट्कोणीय निविड़ संकुलन" होती है। इसके लिए पैकिंग फ्रैक्शन लगभग 0.74 है। इसका मतलब है कि सबसे आदर्श निकटतम पैकिंग में, आयतन का 74% हिस्सा कंचों द्वारा भरा होगा और अधिकतम 26% पानी से। इसके अलावा, सिलेंडर के किनारों पर पैकिंग फ्रैक्शन 0.74 से भी कम होगा। इसलिए, ऊपर दिए गए कार्य में हम जल के स्तर में 120-150 mL के बीच वृद्धि की उम्मीद करते हैं।

Task 6: Estimating the packing fraction (Optional)

कार्य 6: पैकिंग फैक्टर का आकलन (वैकल्पिक)

i. Fill the marked cylinder with marbles up to the 50 mL mark. Count the marbles as you are putting them in one by one. Give the cylinder a good shake to ensure that the marbles are packed as closely as possible and make sure that the marbles are as close as possible to the level with the 50 mL mark by adding or removing some marbles.
   चिन्हित सिलेंडर को 50 mL चिन्ह तक कंचों से भरें। सिलेंडर में कंचों को एक-एक करके डालें और उनकी संख्या गिनते जाएँ। सिलेंडर को अच्छी तरह से हिलाएँ ताकि कंचे जितना संभव हो उतने पास-पास पैक हो जाएँ। 50 mL के चिन्ह तक लाने के लिए आवश्यकता हो तो सिलेंडर में कुछ और कंचे डालें या सिलेंडर से बाहर निकालें।

ii. The packing fraction is the ratio of the volume of the marbles filling up the space to the total volume of the space. Can you find the packing fraction using this definition?
   पैकिंग फ्रैक्शन कंचों द्वारा घेरे गए वास्तविक आयतन और कुल उपलब्ध आयतन का अनुपात होता है। इस परिभाषा का उपयोग करके क्या आप पैकिंग फ्रैक्शन ज्ञात कर सकते हैं ?

iii. Repeat this for the 100 mL and the 150 mL mark and find the packing fractions for these trials as well. What do you notice?
   इस कार्य को 100 mL और 150 mL निशान के लिए दोहराइए, और इन परीक्षणों के लिए भी पैकिंग फ्रैक्शन ज्ञात कीजिए। आपको क्या दिखाई दिया?

- It should not be difficult for the students to find the average volume of one marble by calculation since they know the average radius of a marble. Multiplying by the number of marbles gives the total volume of the marbles. They already know the total space inside the container from the marked volume (50 mL, 100 mL, or 150 mL as the case may be). So they can find the ratio, which is the packing fraction.
  छात्रों के लिए एक कंचे के औसत आयतन को निकालना मुश्किल नहीं होना चाहिए क्योंकि उनको कंचे की औसत त्रिज्या ज्ञात है। एक कंचे के औसत आयतन को कंचों की संख्या से गुणा करने पर उनका कुल आयतन प्राप्त हो जाता है। बर्तन/सिलेंडर के अंदर का आयतन चिन्हों की मदद से (50 mL, 100 mL या 150 mL जो भी स्थिति हो) उन्हें पहले से ही पता है। इसलिए इससे छात्र अनुपात ज्ञात कर सकते हैं जो पैकिंग फ्रैक्शन है।

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

- This is slightly more challenging: Another method is to plot a graph with the total volume of the marbles on the Y-axis and the total volume of the space occupied by them on the X-axis. By drawing a “best fit” straight line through the points, the slope of the line gives the packing fraction.
  यह थोड़ा अधिक चुनौतीपूर्ण है: एक अन्य विधि में कंचों के कुल आयतन को Y- अक्ष पर तथा उनके द्वारा घेरे गए कुल स्थान (आयतन) को X-अक्ष पर लेकर ग्राफ बनाया जाता है। प्राप्त बिन्दुओं से गुजरने वाली “बेस्ट फिट रेखा” की प्रवणता पैकिंग फ्रैक्शन को बताती है।
- An interesting extension of this activity is to compare the packing fractions obtained by using ball bearings and marbles together, and by varying the diameter of the container.
  इस कार्य का एक दिलचस्प विस्तार कंचों तथा कुछ बाल-बियरिंग को एक साथ लेकर और बर्तन/सिलेंडर का व्यास बदलकर इसके द्वारा प्राप्त पैकिंग फ्रैक्शन की तुलना करना है।
- It may be worth expanding the analogy to explain that groundwater is also filled in the pore spaces of soil particles and stones beneath the ground. Thus even though pore spaces in the soil seem tiny, they hold huge amounts of groundwater that we extract via hand pumps and borewells.
  समरुपता द्वारा यह समझा जा सकता है कि भूजल भी जमीन के नीचे विद्यमान मिट्टी के कणों और पत्थरों के बीच के रिक्त स्थानों में भरा हुआ है। इस प्रकार भले ही मिट्टी के कणों के बीच के रंध्र देखने में छोटे लगते हों, उनमें भारी मात्रा में भूजल भरा होता है जो हम हैंडपंप और बोरवैल के द्वारा निकालते हैं।

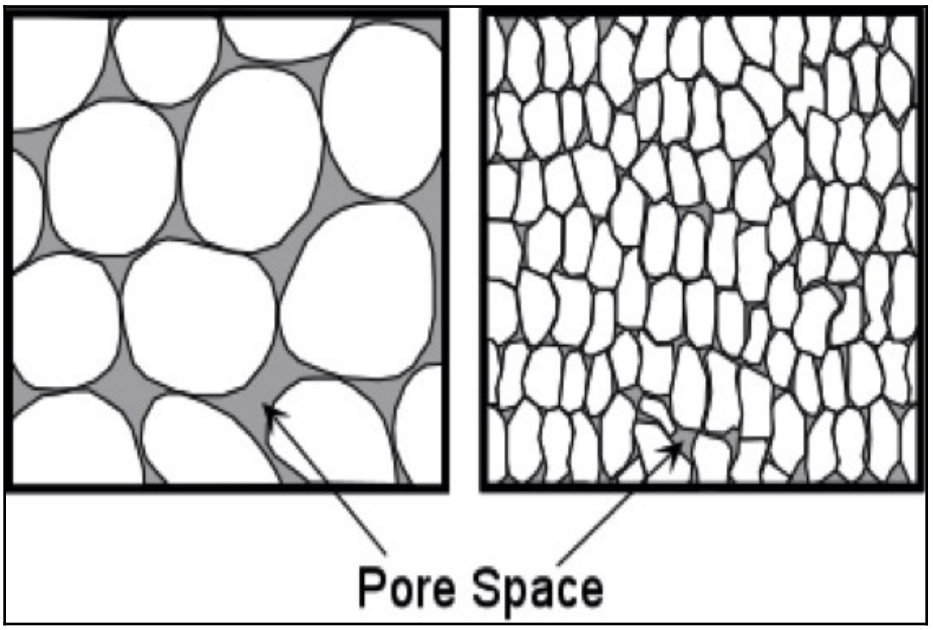

Figure T2: Pore space between soil particles
चित्र T2 : मृदा कणों के बीच रंध्र अंतराल

Figure T3 below shows “hexagonal close packing” that you may have observed in the stacking of balls or of fruits in the market.
नीचे दिया गया चित्र T3 "षट्कोणीय निविड़ संकुलन" दर्शाता है जिसे आपने बाज़ार में गेंदों या फलों के ढेर में देखा होगा।

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. November, 2023.

Figure T3: Fruits stacked in a fruit stall
चित्र T3: फलों की दुकान पर फलों का ढेर

Idea for further extension
आगे विस्तार के लिए सुझाव

What happens if we use a bottle with a larger or smaller diameter, of if we use marbles that are larger or smaller? Does the packing fraction change?
क्या होगा यदि हम बड़े या छोटे व्यास की बोतल और विभिन्न अमापों के कंचों का प्रयोग करें? क्या पैकिंग फ्रैक्शन बदलेगा ?

Suggested readings
सुझाए गए अध्ययन

1) An advanced discussion on pores in soils and their relationship to various processes and phenomena taking place in soil can be found at:
मृदा रंध्रों और मृदा में होने वाली प्रक्रियाओं के बीच संबंध के बारे में अधिक जानकारी के लिए पढ़ें :

   Nimmo, J.R., 2004, Porosity and Pore Size Distribution, in Hillel, D., ed. Encyclopedia of Soils in the Environment: London, Elsevier, v. 3, p. 295-303. Retrived from:
   https://wwwrcamnl.wr.usgs.gov/uzf/abs_pubs/papers/nimmo.04.encyc.por.ese.pdf
2) The overflow principle, the principle that when a body is immersed in a liquid, it displaces an equal volume of the liquid, is often confused with the related but different Archimedes principle. The latter states the equivalance of the force of bouyancy and the weight of the displaced liquid. For an explanation see this link:
   प्लावन का सिद्धांत यह कहता है कि जब कोई वस्तु किसी तरल में डुबोई जाती है वह अपने आयतन के बराबर तरल को विस्थापित करती है। इसको कभी कभी आर्कमिडेक्स के सिद्धांत के साथ मिलाकर देखा जाता है जोकि थोड़ा सा अलग है। आर्किमिडीज़ सिद्धांत उत्प्लावन बल और विस्थापित तरल के भार में समानता व्यक्त करता है। इसकी विस्तृत व्याख्या के लिए आप नीचे दिए गए लिंक पर जा सकते हैं।

   https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/CrownIntro.htmL

Image sources
चित्र स्रोत

- Image 1: *The Crow and the Pitcher: From The Aesop for Children, by Aesop, illustrated by Milo Winter, Project Gutenberg e-text 1994*

  चित्र 1: *"कौआ और घड़ा: दि ईसॉप फॉर चिल्ड्रन" से , लेखक - ईसप, चित्रकार- मिलो विंटर, प्रोजेक्ट गुटनबर्ग, ई-टैक्स्ट, 1994*

Credits
साभार

Main Authors: Ananda Dasgupta, Keyuri Raodeo
Contributing Author: Aniket Sule
Reviewers: Arnab Bhattacharya, Vandana Nanal
Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam
Creative Commons Licence: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE
Translator: Ram Sharan Dass
Translation Coordination: Krishna Kumar Mishra
Translation Editors: Praveen Pathak, Sarita Naswa, Yogesh Dahiya