LU 8.9 Exploring a square grid through rectangles

चौकटीवरील आयत

Overview
आढावा

Students observe and recognize patterns. Based on their observations, they draw some conclusions. But not all the conclusions are valid. These conclusions may be valid in some cases but not in all cases. Consider the question - “What will happen to the area of the rectangle if its perimeter increases?” Many students answer that “with an increase in perimeter, the area also increases”, which is not true.

विद्यार्थी निरीक्षण करतात आणि आकृतीबंध ओळखतात. त्यांच्या निरीक्षणांवरून ते काही निष्कर्षदेखील काढतात. परंतु त्यांचे सर्व निष्कर्ष वैध असतील, असे नाही. त्यांचे निष्कर्ष काही बाबतीत वैध असू शकतील, परंतु ते सर्व बाबतीत वैध नसतील. आता हा प्रश्न पाहूया – “आयताची परिमिती वाढल्यास त्याच्या क्षेत्रफळात काय बदल होईल?” यावर बरेच विद्यार्थी उत्तर देतील की “परिमिती वाढली तर क्षेत्रफळदेखील वाढेल”, परंतु हे उत्तर बरोबर नाही.

In this Learning Unit, students will explore this question and more such questions using a dot grid and construct various rectangles on it. Based on the observations, they will arrive at the conclusion that there is no obvious relationship between the area and perimeter of rectangles.

या अध्ययन घटकामध्ये, विद्यार्थी चौकट कागदावरील बिंदू वापरून हा प्रश्न आणि अशा इतर प्रश्नांची उत्तरे शोधतील, तसेच चौकट कागदावर विविध आयत तयार करतील. त्यांच्या निरीक्षणांवरून ते असा निष्कर्ष काढतील की आयताचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात कोणताही थेट संबंध नसतो.

An important idea is that we need to look for counter-examples to understand statement is not true. As a part of this unit, discuss how in the case of establishing the correctness of a mathematical result, giving examples is not enough; in the case of proving a result wrong, counter-examples are enough.

एक महत्त्वाची कल्पना अशी की एखादे विधान सत्य नाही, हे समजून घ्यायचे असेल तर आपल्याला विधानाची प्रति-उदाहरणे शोधण्याची आवश्यकता असते. हे घटक करत असताना, गणिताच्या विधानाची अचूकता सिद्ध करण्यासाठी फक्त उदाहरणे देणे पुरेसे नसते; पण विधान चुकीचे सिद्ध करायचे असेल तर केवळ एक प्रति-उदाहरण पुरेसे असते, यावर चर्चा करा.

These questions can be also explored using other contexts, such as those discussed in LU 8.1 and LU 8.14. This activity may be attempted by students individually. However, discussions between students may be encouraged as they attempt the tasks.

या प्रश्नांबाबत इतर संदर्भ -जसे अध्ययन घटक 8.1 आणि 8.14 - वापरून चर्चा केली जाऊ शकते. ही कृती विद्यार्थी स्वतःहून करू शकतात. मात्र, विद्यार्थी कृती करत असताना त्यांच्यात चर्चा घडून येण्यासाठी प्रोत्साहित करावे.

Minimum time required: Four sessions of 40 minutes each.
किमान आवश्यक वेळ : 40 मिनिटांची चार सत्रे.

Type of Learning Unit: Classroom
अध्ययन घटकाचा प्रकार: वर्गात

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

Unit-specific objectives
अध्ययन घटकाची उद्दिष्टे

- To find the areas and perimeters of rectangles on a dot grid.
  चौकट कागदावर आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती काढणे
- To formulate conjectures based on the areas and perimeters of rectangles.
  आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांवर आधारित अनुमाने तयार करणे
- To understand the relationship between the area and perimeter of rectangles.
  आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यातील संबंध समजून घेणे

Prerequisites
पूर्वज्ञान

Students should be familiar with basic understanding of area and perimeter of rectangles and triangles.
विद्यार्थ्यांना आयत आणि त्रिकोण यांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांविषयी मूलभूत माहिती असणे गरजेचे आहे.

Introduction
ओळख

You have calculated areas and perimeters of figures like rectangles and triangles many times. Have you ever wondered what is the relationship between area and perimeter of a figure? What happens when area increases? Does the perimeter increase or decrease? What happens to the area if the perimeter decreases?
तुम्ही त्रिकोण आणि आयत यांसारख्या आकृतींचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती अनेकदा काढली असेल. एखाद्या आकृतीचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात संबंध काय असतो, याचा विचार तुम्ही कधी केला आहे का? जेव्हा आकृतीचे क्षेत्रफळ वाढते तेव्हा काय होते? परिमिती वाढते की कमी होते? जर परिमिती कमी झाली तर क्षेत्रफळाचे काय होते?

Here, we will explore the relationship between the area and perimeter of rectangles. We will do this, however, with an important constraint – the rectangles will be those that can be drawn on a square grid such that the corners (vertices) of the rectangles are grid points.
येथे, आयताचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात असलेला संबंध आपण शोधणार आहोत. मात्र, हे करताना आपल्यासमोर एक महत्त्वाची अट आहे - आपण असे आयत पाहणार आहोत जे चौकट-कागदावर (*आकृती 1अ* आणि *1ब पहा*) काढता येऊ शकतात. म्हणजेच या आयतांचे कोपरे (शिरोबिंदू) हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत.

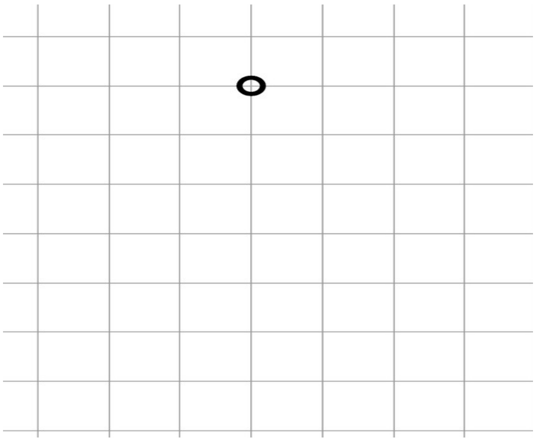

***Figure 1a** आकृती 1अ*

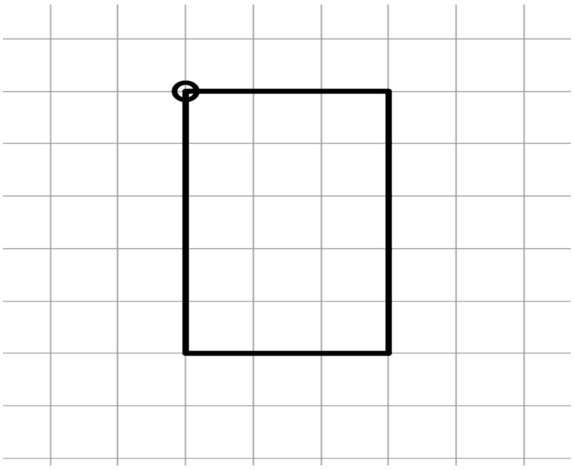

***Figure 1b:** Rectangle drawn on square grid*
***आकृती 1 ब :** चौकट कागदावर काढलेला आयत*

Materials required
कृतीसाठी लागणारे साहित्य :

Grid papers (each student will require three to four square grid papers), pencil
चौकट-कागद (प्रत्येक विद्यार्थ्याला साधारणपणे तीन ते चार चौकट-कागद लागतील), पेन्सिल

Look at the grid paper you have.
तुमच्याकडे असलेला चौकट-कागद नीट पहा.

Let us call the length of the line segment AB (shown in *figure 2a*) as one unit of length
चला, रेषाखंड AB ची लांबी 1 एकक आहे, असे मानूया (*आकृती 2 अ* मध्ये दाखवल्याप्रमाणे).

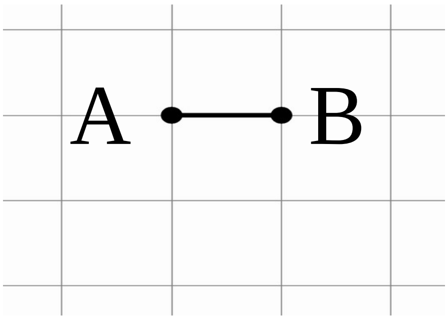

Figure 2a *आकृती 2 अ*

Ask the students what are the other lengths they can consider as units on the grid paper. Discuss what will happen if the diagonal is chosen as the unit.
चौकट-कागदवर एकक म्हणून इतर कोणत्या लांबीचा विचार करता येईल, ते विद्यार्थ्यांना विचारा. एकक म्हणून कर्ण निवडल्यास काय होईल, याची चर्चा करा.

If we consider the diagonal as one unit, then the length of the line segment is $\frac{1}{\sqrt{2}}$ units, which is less convenient to deal with.
जर आपण कर्णाची लांबी एक एकक मानली, तर रेषाखंडाची लांबी $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एकक इतकी होईल, जी हाताळणे कमी सोयीची असेल.

Now, considering the above length as one unit, what can you say about the area of the shape in *figure 2b*? Why do you think so? Discuss with your friends.
आता, रेषाखंड AB ची लांबी एक एकक मानल्यास *आकृती 2 ब* मधील आकाराचे क्षेत्रफळ किती असेल, ते सांगा? असे तुम्हाला का वाटते, याबद्दल आपापसांत चर्चा करा.

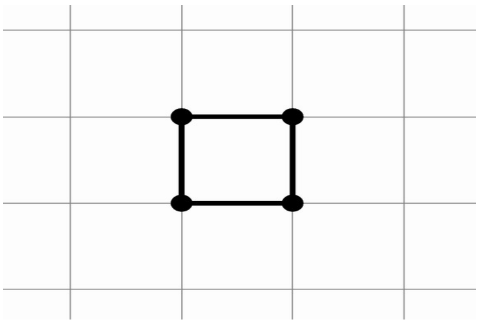

Figure 2b *आकृती 2 ब*

At this point, do take some time out and discuss with your students about the meaning of 'the area

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

is one square unit'. Try to emphasise the fact that - any area equal to the area covered by a square of side one unit length - is defined to be one square unit, and is not just because the area of a square is side × side.

या टप्प्यावर, थोडा वेळ घ्या आणि तुमच्या विद्यार्थ्यांबरोबर 'क्षेत्रफळ हे एक चौरस एकक आहे' याचा अर्थ काय होतो, याबाबत चर्चा करा. यावर भर द्या की एक चौरस एकक क्षेत्रफळ म्हणजे ज्या चौरसाच्या बाजूची लांबी एक एकक आहे अशा चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे क्षेत्रफळ. चौरसाचे क्षेत्रफळ केवळ बाजू × बाजू असते, म्हणून नाही.

While asking the students to draw different shapes of area one square unit, ask them why they think these shapes have area one sq unit. Remember that one unit length is the distance between two adjacent dots. Some examples are given here:
विद्यार्थ्यांना एक चौरस एकक क्षेत्रफळाचे वेगवेगळे आकार काढायला सांगताना, या आकारांचे क्षेत्रफळ 'एक चौरस एकक' का आहे, ते विचारा. लक्षात ठेवा की एक एकक लांबी ही दोन लगतच्या बिंदूंमधील अंतर आहे. पुढे काही उदाहरणे दिली आहेत.

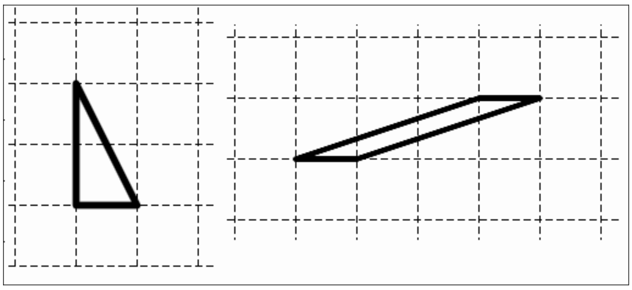

Figure T1 *आकृती T1*

After the students have drawn figures of area one square unit, ask them to justify their answers.
विद्यार्थ्यांनी एक चौरस एकक क्षेत्रफळाच्या आकृत्या काढल्यानंतर त्यांना उत्तराचे स्पष्टीकरण विचारा.

Task 1: Any more unit areas…?
कृती 1: एक एकक क्षेत्रफळाचे अजून आकार…?

Draw a few more (at least two) figures such that their areas are also one square unit.
आणखी किमान दोन आकृत्या अशा काढा, ज्यांचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक असेल.

In the following task, encourage the students to draw various rectilinear figures. The main objective of this activity is for the students to realise that area is not just a formula, and that they can actually find the area simply by counting the unit squares or half-squares on the dot grid. One way to calculate the area of a rectilinear shape is shown in figure T2.
पुढील कृती करताना, विद्यार्थ्यांना निरनिराळ्या सरळरेषीय आकृत्या (अशा आकृत्या ज्यांचे सर्व कोन 90^0 किंवा 270^0 असतात) काढायला प्रोत्साहित करा. या कृतीचा मुख्य उद्देश असा आहे की क्षेत्रफळ म्हणजे केवळ एक सूत्र नसते हे विद्यार्थ्यांना समजायला हवे आणि प्रत्यक्षात चौकट कागदावरील एकक चौरसांची संख्या किंवा अर्ध-चौरसांची संख्या मोजून ते क्षेत्रफळ काढू शकतात. एका सरळरेषीय आकाराचे क्षेत्रफळ मोजण्याची पद्धत *आकृती T2* मध्ये दाखवली आहे.

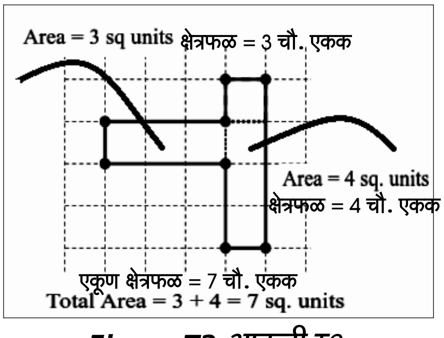

Figure T2 *आकृती T2*

Task 2: When all adjacent sides are perpendicular...
कृती 2: जेव्हा लगतच्या बाजू एकमेकांना लंब असतील तर...

The polygons drawn in *figure 3* are called rectilinear polygons.
आकृती 3 मध्ये काढलेल्या बहुभुजाकृतींना 'सरळरेषीय बहुभुजाकृती' म्हणतात.

Remember that all the vertices of these figures should be on the grid points.
लक्षात घ्या, या आकृत्यांचे सर्व शिरोबिंदू हे चौकटीच्या बिंदूंवर असले पाहिजेत.

A rectilinear polygon is a polygon, all of whose angles are either 90° or 270°. Some examples of rectilinear shapes are given here.
सरळरेषीय बहुभुजाकृती ही अशी एक बहुभुजाकृती असते, जिचे कोन एकतर 90° किंवा 270° असतात. पुढे सरळरेषीय बहुभुजाकृतींचे काही आकार दाखवलेले आहेत.

Draw five such figures and find their areas and perimeters.
अशा प्रकारच्या पाच आकृत्या काढा आणि त्यांचे क्षेत्रफळ तसेच परिमिती काढा.

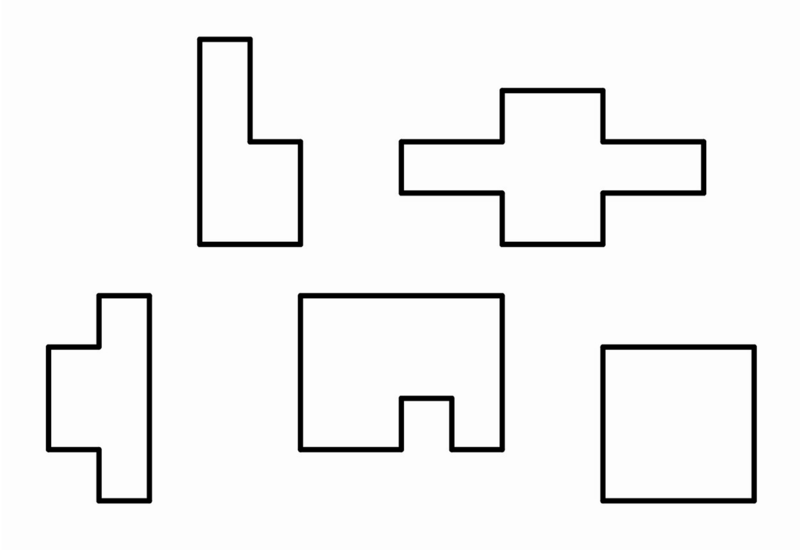

Figure 3 *आकृती 3*

In the following task, try to bring to the students' attention that the figures given below can be found by cutting some triangles from a rectilinear figure or adding some triangles to a rectilinear figure. And hence one way to calculate their area is to add or subtract the area of the said triangles. The main objective of this activity is similar to the earlier one. This activity will encourage students further to calculate area by counting, adding and subtracting.
पुढील कृतीमध्ये, विद्यार्थ्यांच्या हे लक्षात आणून देण्याचा प्रयत्न करा की वर दिलेल्या आकृत्या एखाद्या सरळरेषीय आकृतीतील काही त्रिकोण कापून किंवा एखाद्या सरळरेषीय आकृतीला काही त्रिकोण जोडून मिळू शकतात. म्हणूनच त्यांचे क्षेत्रफळ काढण्याचा एक मार्ग म्हणजे उल्लेख केलेल्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ मिळवणे किंवा वजा करणे. या कृतीचे मुख्य उद्दिष्ट हे आधीच्या कृतीसारखेच आहे. या कृतीमुळे विद्यार्थ्यांना मोजून, बेरीज करून आणि वजाबाकी करून क्षेत्रफळ काढायला प्रोत्साहन मिळेल.

Also ask the students if these figures are rectilinear figures or not and let them reason why these figures are not rectilinear figures.
तसेच या सरळरेषीय आकृत्या आहेत किंवा नाहीत, हे विद्यार्थ्यांना विचारा आणि त्या सरळरेषीय आकृत्या का नाहीत, याचे स्पष्टीकरण त्यांना सांगू द्या.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

Task 3: What if some adjacent sides are NOT perpendicular...?
कृती 3: जर लगतच्या काही बाजू लंब नसतील तर...?

Figure 4 shows some polygons. Find the area of the given figures.
आकृती 4 मध्ये काही बहुभुजाकृती आहेत. त्या आकृत्यांचे क्षेत्रफळ काढा.

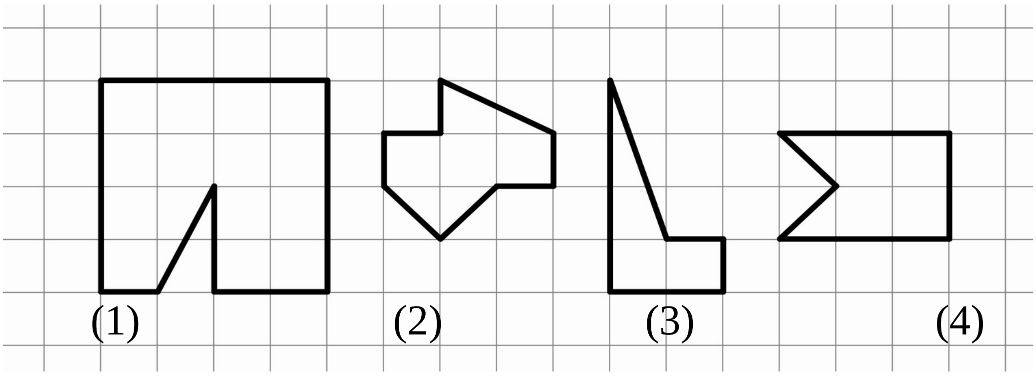

***Figure 4** आकृती 4*

For the following task, encourage the students to measure areas using alternative methods. It is not necessary that everyone uses the formula to calculate area; they can count the number of unit squares inside the rectangles, or divide the rectangles into squares and add their areas, or make triangles and find the area. Different methods will also give them assurance of how the measure of the region—i.e., area remains the same even if different methods are used.
पुढील कृतीमध्ये, विद्यार्थ्यांना पर्यायी पद्धती वापरून क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी प्रोत्साहित करा. क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी प्रत्येकाने सूत्रच वापरायला हवे, असे नाही; ते आयताच्या आतल्या भागातील एकक चौरसांची संख्या मोजू शकतात किंवा आयतांना चौरसांमध्ये विभागू शकतात आणि त्यांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज करू शकतात, किंवा त्रिकोण बनवू शकतात आणि त्यांचे क्षेत्रफळ काढू शकतात. वेगवेगळ्या पद्धतींचा वापर केल्यामुळे एखाद्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ कसे काढतात हे विद्यार्थ्यांना समजेल. वेगवेगळ्या पद्धती वापरल्या तरीही क्षेत्रफळ सारखेच येते, हेही त्यांच्या लक्षात येईल.

When students come up with slanted rectangles (which are not aligned to the two perpendicular axes), ask them to explore the possibility of finding the areas and perimeters of these rectangles.
जेव्हा विद्यार्थी तिरके आयत काढतील, तेव्हा त्यांना अशा आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती काढण्याच्या पद्धती शोधायला सांगा.

One of the ways of finding the area of a tilted rectangle is to surround the rectangle with a square and remove the areas of the triangles as shown in *Figure T3*.
तिरक्या आयताचे क्षेत्रफळ शोधण्याची एक पद्धत म्हणजे *आकृती T3* मध्ये दाखवल्याप्रमाणे आयताभोवती चौरस काढणे आणि चौरसातील त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ वजा करणे.

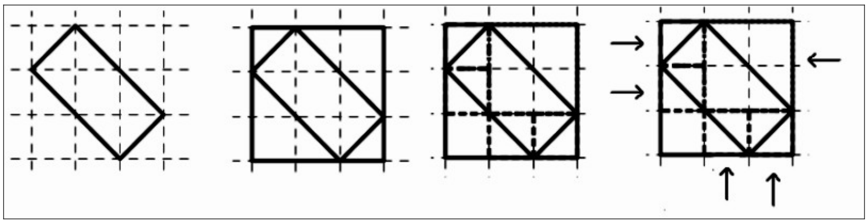

***Figure T3** आकृती T3*

The students might find it difficult to find the perimeter of the rectangle in the figure T4. You can ask them to calculate the length using Pythagoras' theorem and encourage them to discuss what the length can be. This might need you to introduce to the students how square roots can be added (e.g., $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ and not $\sqrt{8}$). If some of the students suggest that $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$, ask them to justify their answer. Help them see that this is not the case. One way to

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

do this is to square both the entities (4√2 and √8 and see that they are not equal)
विद्यार्थ्यांना *आकृती T4* मधील आयताची परिमिती काढणे कठीण जाऊ शकते. तुम्ही त्यांना पायथागोरसचे प्रमेय वापरायला सांगून लांबी काढायला सांगू शकता आणि लांबी किती असू शकते, याबाबत चर्चा करायला प्रोत्साहित करू शकता. वर्गमुळांची बेरीज कशी करतात, (उदा., $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ आणि √8 हे नाही) हे विद्यार्थ्यांना माहीत करून देण्याची गरज पडू शकते. जर काही विद्यार्थ्यांनी $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ असे सुचवले, तर त्यांना उत्तराचे स्पष्टीकरण द्यायला सांगा. √8 चुकीचे उत्तर आहे हे समजून घ्यायला विद्यार्थ्यांना मदत करा. हे समजून देण्यासाठी दोन्ही राशींचा वर्ग करणे, हा एक मार्ग असू शकतो (4√2 आणि √8 या संख्या समान नाहीत, हे पहा).

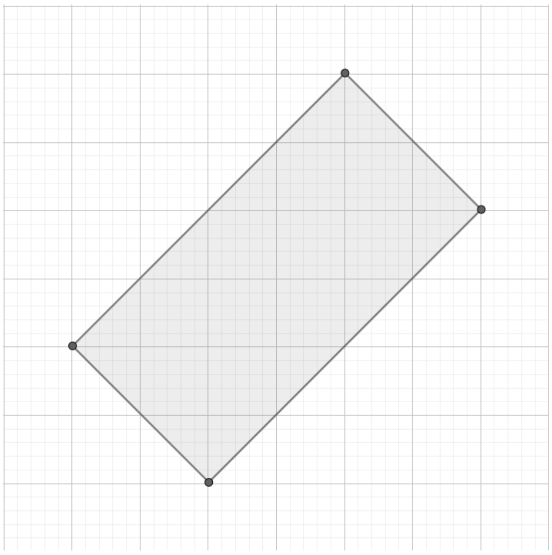

Figure T4 ***आकृती*** *T4*

The important thing is to note that for any tilted rectangle on the grid, the side of the rectangle is of the type $\sqrt{n}$, where n is a natural number
येथे एक महत्त्वाची गोष्ट लक्षात घेणे गरजेचे आहे की चौकट कागदावरील कोणत्याही तिरक्या आयतासाठी, आयताची बाजू $\sqrt{n}$ प्रकाराची असते, जेथे n ही नैसर्गिक संख्या असते.

Task 4: Focusing on rectangles…?
कृती 4: चला आयत पाहू या …?

Draw five rectangles on the grid paper. Keep in mind the following:
चौकट-कागदावर पाच आयत काढा. हे करताना पुढील बाबी लक्षात ठेवा:

1. The vertices of the rectangles should be grid points.
आयताचे शिरोबिंदू हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत.
2. The rectangles should be of different sizes.
आयत वेगवेगळ्या मापाचे असले पाहिजेत.
3. At least one of the rectangles should be tilted.
किमान एक तरी आयत तिरका (कललेला) असला पाहिजे.

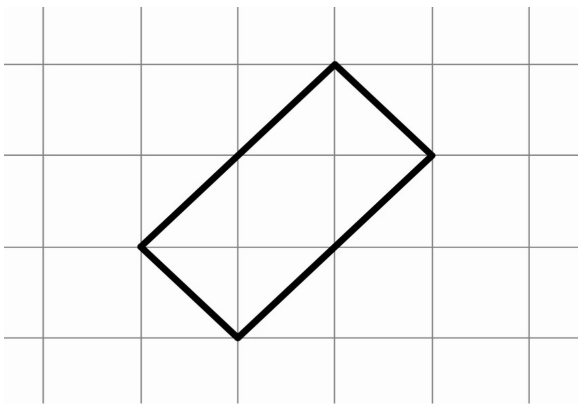

Figure 5: *Tilted rectangle* ***आकृती*** *5: तिरका आयत*

4. Measure and write the area and the perimeter of the rectangles which are not tilted. Discuss how you got your answers.
तिरके आयत वगळता, इतर आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती मोजा आणि लिहा. तुम्हाला उत्तरे कशी मिळाली, याबद्दल चर्चा करा.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

The vertices of the rectangles should be grid points!

आयताचे शिरोबिंदू हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत! (आकृती 1 पाहा)

For every sub-task in the next task, draw a table like *Table T1* on the board and record the students' findings. (Table T1 provides one example for perimeter equal to 12 units.)
पुढील कृतीतील प्रत्येक उपकृतीसाठी, फळ्यावर *तक्ता T1* प्रमाणे एक तक्ता काढा आणि विद्यार्थ्यांनी काढलेली मापे नोंदवा (*तक्ता T1* मध्ये, 12 एकक परिमिती असलेले एक उदाहरण दिले आहे).

Perimeter is 12 units परिमिती 12 एकक			
Rectangle आयात	Length लांबी	Breadth रुंदी	Area क्षेत्रफळ
I	1	5	5
II	2	4	8
III	3	3	9
IV	4	2	8
V	5	1	5

Table T1 तक्ता T1

While you are recording in the table, you can try to record the lengths in ascending or descending order so that the students notice a pattern in the length and the breadth. Discuss with the students which rectangles are congruent (same) and which are not. And why?
जेव्हा तुम्ही तक्त्यामध्ये नोंद करत असाल तेव्हा लांबी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने नोंद करण्याचा प्रयत्न करा, जेणेकरून विद्यार्थ्यांना लांबी आणि रुंदी यांच्यातील आकृतिबंध लक्षात येईल. तसेच कोणते आयत एकरूप आहेत आणि कोणते एकरूप नाहीत आणि का?, याची विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करा.

Apart from tables, you can also use graphs, or plots of lengths versus area. Plots make some of the symmetry more visible.
तक्त्यांशिवाय, लांबी विरुद्ध क्षेत्रफळ यांचा आलेख काढू शकता. आलेखामुळे सममिती अधिक स्पष्ट होऊ शकते.

You can also bring to their notice that in case of perimeter 16 units, the largest area is occupied by the square (length and breadth are equal). In the case of 18, the largest area is covered when the difference between the length and the breadth is the lowest possible. Do point out that the difference of 1 is the lowest possible because we are working with whole numbers.
आपण त्यांच्या लक्षात आणून देऊ शकता की जेव्हा परिमिती 16 एकक आहे, तेथे सर्वांत मोठे क्षेत्रफळ चौरसाने व्यापलेले आहे (लांबी आणि रुंदी समान आहे). जेव्हा परिमिती 18 एकक आहे तेव्हा लांबी आणि रुंदी यांच्यातील फरक शक्य तितका कमी असल्याने सर्वांत मोठे क्षेत्रफळ मिळते. आपण पूर्ण संख्यांचा वापर करत असल्याने सर्वांत कमी फरक 1 असतो हे लक्षात आणून द्या.

The two numbers 16 and 18 have been chosen as perimeters, because for one of them (16) you get a square of area i.e., 16 square units, and for the other (18) you do not. You can discuss that a number has to be a multiple of 4 to get a square whose perimeter is that number.
So there can be questions like, "Can there be a square of perimeter 22 on the grid?" Ask them to give reasons for their answers.
16 आणि 18 या दोन संख्या आपण परिमिती म्हणून निवडल्या आहेत, कारण त्यापैकी एका संख्येसाठी (16) आपल्याला एक

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

चौरस मिळतो ज्याचे क्षेत्रफळ 16 चौरस एकक आहे. मात्र दुसऱ्या संख्येसाठी (18) चौरस मिळत नाही. तुम्ही चर्चा करू शकता की परिमिती ही 4 च्या पटीत असल्यावरच तुम्हाला तेवढ्याच परिमितीचा चौरस मिळतो. म्हणून येथे असे प्रश्न आपण विचारू शकता की, “चौकट कागदावर 22 परिमितीचा चौरस असू शकेल का?” त्यांच्या उत्तरांची कारणे द्यायला सांगा.

For all the sub-tasks in this unit, while you are recording in the table, you can try to record the lengths in ascending or descending order so that the children notice a pattern in the length and the breadth.

या अध्ययन घटकामधील सर्व उप-कृतींसाठी, जेव्हा तुम्ही तक्त्यामध्ये नोंद कराल, तेव्हा तुम्ही लांबी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडण्याचा प्रयत्न करू शकता, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना लांबी आणि रुंदी यांच्यातील आकृतिबंध लक्षात येईल.

Task 5: Perimeter same, but rectangles different…?

कृती 5: परिमिती समान, पण आयत वेगळे …?

Sub task 1

उपकृती 1

Draw different rectangles on your square grid, all of which have a perimeter of 16 units. (Draw as many as you can.)

तुमच्या चौकट-कागदावर असे वेगवेगळे आयत काढा, ज्यांची परिमिती 16 एकक असेल (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).

1. Complete the table given below based on your rectangles.
   तुमच्या आयतांच्या माहितीवर आधारित पुढे दिलेला तक्ता भरा.
2. Which rectangle has the largest area? Which rectangle has the smallest area?
   कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वांत जास्त आहे? कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वांत कमी आहे?
3. Compare your table with those of your friends.
   तुमच्या तक्त्यातील माहितीची तुलना इतरांच्या तक्त्यातील माहितीशी करा.
4. Did you get a square in your table? Is a square also a rectangle?
   तुमच्या तक्त्यानुसार त्यात एखादा ‘चौरस’ आहे का? चौरस हा आयत असतो का?

___

___

Note: “Semi-perimeter” of the rectangle is half of the perimeter.
नोंद: आयताची 'अर्धपरिमिती' ही त्याच्या परिमितीच्या अर्धी असते.

Perimeter is 16 units परिमिती 16 एकक				
Rectangle आयत	Length लांबी	Breadth रुंदी	Semi-perimeter अर्धपरिमिती	Area क्षेत्रफळ
I				
II				
III				
IV				
V				
VI				
VII				

Table 1 तक्ता 1

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

Sub task 2
उपकृती 2

1. Draw different rectangles on your square grid, all of which have a perimeter of 18 units. (Draw as many as you can.)
   तुमच्या चौकट-कागदावर असे वेगवेगळे आयत काढा, ज्यांची परिमिती 18 एकक असेल (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).
2. Complete the table given below based on your rectangles.
   तुमच्या आयतांच्या माहितीवर आधारित पुढे दिला तक्ता भरा.
3. Which rectangle has the largest area? Which rectangle has the smallest area?
   कोणत्या आयताचे क्षेत्रकळ सर्वांत जास्त आहे? कोणत्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वांत कमी आहे?
4. Compare your table with the tables drawn by your friends.
   तुमच्या तक्त्यातील माहिती आणि इतरांची माहिती यांच्यात तुलना करा.
5. Did you get a square in your table?
   तुमच्या तक्त्यानुसार त्यात एखादा चौरस आहे का?

Perimeter is 18 units परिमिती 18 एकक				
Rectangle आयत	Length लांबी	Breadth रुंदी	Semi-perimeter अर्धपरिमिती	Area क्षेत्रफळ
I				
II				
III				
IV				
V				
VI				
VII				

Table 2 तक्ता 2

The vertices of the rectangles should be grid points!

आयताचे शिरोबिंदू हे चौकटीचे बिंदू असले पाहिजेत! (आकृती 1 पाहा)

In the next task, for every sub-task, draw a table like this on the board and record the students' findings.
पुढील कृतीत, प्रत्येक उपकृतीसाठी, फळ्यावर एक तक्ता काढा आणि विद्यार्थ्यांचे निष्कर्ष नोंदवा.

Area is ____ square units क्षेत्रफळ _____ चौरस एकक				
Rectangle आयत	Length लांबी	Breadth रुंदी	Semi-perimeter अर्धपरिमिती	Perimeter परिमिती
I				
II				
...				

***Table T2** तक्ता T2*

In the case of 36 square units, try to bring out the fact that the square (each side 6 units) has the lowest perimeter. And that for a given area, larger the difference between the two lengths, the greater is the perimeter.

जेव्हा क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक असेल तेव्हा चौरसाची (प्रत्येक बाजू 6 एकक) परिमिती सर्वांत कमी असेल, ही गोष्ट लक्षात आणून द्या. तसेच एखाद्या दिलेल्या क्षेत्रफळासाठी दोन लांबींमधील फरक जितका मोठा असेल, तितकी परिमिती जास्त असेल हे सांगा.

Please note that for at least two of the sub-tasks given below, you will get at least one pair of tilted rectangles whose area would be the required area.

कृपया लक्षात घ्या की पुढे दिलेल्या उपकृतींपैकी कमीत कमी दोन उपकृतींसाठी तुम्हाला तिरक्या आयतांची किमान एक जोडी मिळेल, ज्यांचे क्षेत्रफळ वर दिलेल्या क्षेत्रफळाएवढे असेल.

If the students do not come up with these examples themselves, give them clues to draw these tilted rectangles and find their areas and perimeters.

जर विद्यार्थ्यांना स्वतःहून ही उदाहरणे सुचली नाहीत, तर त्यांना तिरके आयत काढण्यासाठी सूचनिका (hint) द्या आणि त्यांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती काढायला सांगा.

In these tasks, the students will work with 3 numbers; 36, 17, and 24. Each of these numbers gives different types of rectangles whose area is that number.

या कृतींमध्ये, विद्यार्थी तीन संख्यांचा वापर करतील; 36, 17 आणि 24. यांपैकी प्रत्येक संख्येसाठी वेगवेगळ्या प्रकारचे आयत काढतील, ज्यांचे क्षेत्रफळ तीच संख्या असेल.

In the case of 36, you get a square (side 6 units) along with a few more rectangles; you will also get tilted rectangles whose area is 36 square units. For 17, you get 1 rectangle whose sides are parallel to the grid axis, which is definitely not a square. But you get a tilted square of area 17 square units. (see figure T5). In the case of 24, you don't get a square on the grid but get rectangles both straight and tilted. Interestingly, in case of 24, you get a tilted rectangle which is 3 copies of a tilted square of area 8 square units (see figure T6).

क्षेत्रफळ 36 असलेल्या काही आयतांबरोबर तुम्हाला एक चौरस (6 एकक बाजूचा) मिळेल; तुम्हाला तिरके आयतदेखील मिळतील ज्यांचे क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक असेल. क्षेत्रफळ 17 साठी, तुम्हाला एक असा आयत मिळेल ज्याच्या बाजू चौकट कागदाच्या अक्षाला समांतर असतील, जो निश्चितपणे चौरस नसेल. परंतु तुम्हाला क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक असलेला तिरका चौरस मिळेल (*आकृती T5* पहा). क्षेत्रफळ 24 च्या बाबतीत, तुम्हाला चौकट कागदावर चौरस मिळणार नाही, परंतु असे आयत मिळतील जे दोन्ही, सरळ आणि तिरके असतील. विशेष म्हणजे, क्षेत्रफळ 24 च्या बाबतीत तुम्हाला एक तिरका आयत मिळेल, जो 8 चौरस एकक क्षेत्रफळ असलेल्या 3 तिरक्या चौरसांनी मिळून बनलेला असेल (*आकृती T6* पहा).

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

Task 6: Now, some same area rectangles …?
कृती 6: आता, काही समान क्षेत्रफळाचे आयत…?

Sub task 1
उपकृती 1

1. Draw different rectangles which have an area of 36 square units. (Draw as many as you can.)
   तुमच्या चौकट-कागदावर असे वेगवेगळे आयत काढा, ज्यांचे क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक असेल (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).
5. Fill the given table.
   दिलेल्या तक्त्यात माहिती भरा.
6. Did you get a square?
   तुम्हाला एखादा चौरस मिळाला का?
7. Compare your table with the tables drawn by some of your friends.
   तुमच्या तक्त्यातील माहिती आणि इतरांची माहिती यांच्यात तुलना करा.

Area is 36 square units क्षेत्रफळ 36 चौरस एकक				
Rectangle आयत	Length लांबी	Breadth रुंदी	Semi-perimeter अर्धपरिमिती	Perimeter परिमिती
I				
II				
III				
IV				
V				
VI				
VII				

Table 3 तक्ता 3

Sub task 2
उपकृती 2

1. Draw different rectangles which have an area of 17 square units. (Draw as many as you can.)
   तुमच्या चौकट-कागदावर असे वेगवेगळे आयत काढा, ज्यांचे क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक असेल (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).
2. Fill the given table.
   दिलेल्या तक्त्यात माहिती भरा.
3. Did you get any square?
   तुम्हाला एखादा चौरस मिळाला का?
4. Compare your table with the tables filled by some of your friends.
   तुमच्या तक्त्यातील माहिती आणि वर्गातील इतरांची माहिती यांच्यात तुलना करा.

Area is 17 square units क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक				
Rectangle आयत	Length लांबी	Breadth रुंदी	Semi-perimeter अर्धपरिमिती	Perimeter परिमिती
I				
II				
III				

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

IV				
V				
VI				
VII				

Table 4 तक्ता 4

Apart from the standard rectangles like 17 × 1 or 1 × 17, for area 17 square units, one can also get a tilted rectangle, which is a square like the one given in figure T5. Side of the square = $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$
So, the area of the square is 17 square units.

17 × 1 किंवा 1 × 17 सारख्या स्वाभाविक आयतांशिवाय, ज्यांचे क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक आहे, असा *आकृती T5* मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एक तिरका आयतदेखील मिळू शकतो, जो चौरस आहे. चौरसाची बाजू = $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$
म्हणून, चौरसाचे क्षेत्रफळ 17 चौरस एकक होईल.

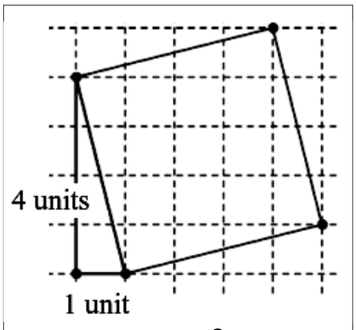

Figure T5 आकृती T5

Sub task 3
उपकृती 3

1. Draw different rectangles having an area of 24 square units. (Draw as many as you can.)
   क्षेत्रफळ 24 चौरस एकक असलेले वेगवेगळे आयत काढा (तुम्हाला शक्य होतील तेवढे आयत काढा).
2. Make a table like the one above.
   वर दिल्याप्रमाणे एक तक्ता बनवा.
3. Do you see any congruent rectangles among the rectangles you have drawn?
   तुम्ही काढलेल्या आयतांमध्ये तुम्हाला कोणते तरी एकरूप आयत दिसतात का?
4. Compare your table with tables filled by some of your friends.
   तुमच्या तक्त्यातील माहितीची तुलना वर्गातील इतरांच्या माहितीबरोबर करा.

Area is 24 square units क्षेत्रकळ 24 चौरस एकक				
Rectangle आयत	Length लांबी	Breadth रुंदी	Semi-perimeter अर्धपरिमिती	Perimeter परिमिती
I				
II				
III				
IV				
V				
VI				
VII				

Table 5 तक्ता 5

Apart from the standard rectangles like 6 × 4, 8 × 3, 12 × 2, 24 × 1, for area 24 square units, one can also get a tilted rectangle like the one given in figure T6. Look at the square ABCD. If you count the number of unit of squares inside ABCD, you will find that there are 4 full unit squares and 8 half unit squares.
So the area of square ABCD = (4 × 1) + (8 × 1/2) = 8 square units.
Hence, the area of the rectangle ABGH is 8 + 8 + 8 = 24 square units.

6 × 4, 8 × 3, 12 × 2, 24 × 1 सारख्या स्वाभाविक आयतांव्यतिरिक्त, 24 चौरस एकक

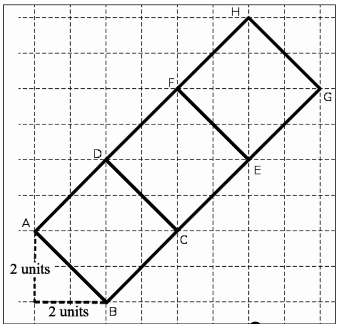

Figure T6 आकृती T6

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

क्षेत्रफळासाठी *आकृती T6* मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एक तिरका आयतदेखील मिळू शकतो. ABCD चौरस पहा. जर तुम्ही ABCD मधील चौरस एककांची संख्या मोजली, तर तुम्हाला 4 पूर्ण चौरस (ज्यांची बाजू एक एकक आहे) आणि 8 अर्धे चौरस (ज्यांची बाजू एक एकक आहे) मिळतील.

त्यामुळे चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ = $(4 \times 1) + (8 \times 1/2) = 8$ चौरस एकक

म्हणून, आयत ABGH चे क्षेत्रफळ $8 + 8 + 8 = 24$ चौरस एकक होईल.

Task 7: Next, rectangles with equal areas and equal perimeters…?
कृती 7: आता, समान क्षेत्रफळ आणि समान परिमिती असलेले आयत…?

Can you draw two different rectangles whose perimeter is 14 units and area is 12 square units? How many different rectangles did you get? Compare your rectangles with those drawn by your friends. Are they the same?

तुम्ही असे दोन वेगवेगळे आयत काढा की ज्यांची परिमिती 14 एकक आणि क्षेत्रफळ 12 चौरस एकक आहे? तुम्ही किती वेगवेगळे आयत काढले? तुम्ही काढलेल्या आयतांची तुलना इतरांनी काढलेल्या आयतांशी करा. ते आयत सारखे आहेत का?

Did you get different rectangles? If yes, share your answer with your friends and your teacher. If you think it is not possible, think about why not?

तुम्हाला वेगळे आयत मिळाले का? याचे उत्तर होय असल्यास, तुमचे उत्तर इतरांना आणि शिक्षकांना सांगा. असे शक्य नाही, असे तुम्हाला वाटल्यास, 'का नाही' असा विचार करा.

____

____

____

After these tasks are completed, try to reach some conclusions for the following statements (More such statements can come from your students.)

ही कृती पूर्ण झाल्यानंतर, पुढील विधानांसाठी काही निष्कर्षांपर्यंत पोहोचण्याचा प्रयत्न करा (अशा स्वरूपाची आणखी विधाने तुमच्या विद्यार्थ्यांकडून येऊ शकतात).

1. It is possible that even if the area of a rectangle increases, the perimeter decreases.
हे शक्य आहे की जरी आयताचे क्षेत्रफळ वाढले, तरी परिमिती कमी होते.

2. It is possible that even if the perimeter of a rectangle increases, the area decreases.
हे शक्य आहे की जरी आयताची परिमिती वाढली, तरी क्षेत्रफळ कमी होते.

3. There are rectangles which are not congruent but have the same area or the same perimeter.
असे आयत असतात जे एकरूप नसतात, परंतु त्यांचे क्षेत्रफळ समान किंवा परिमिती समान असते.

4. There is no obvious relationship between the area and perimeter of a rectangle.
आयताचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती यांच्यात कोणताही थेट संबंध नसतो.

5. If for two rectangles, the area and the perimeter are both equal, then the rectangles are congruent.
जर दोन आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती दोन्ही समान असतील तर ते आयत एकरूप असतात.

Claim: If for two rectangles, the area and the perimeter are both equal, then the rectangles are congruent.

साध्य : जर दोन आयतांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती दोन्ही समान असतील तर ते आयत एकरूप असतात.

Proof:

सिद्धता :

Given that: Rectangle 1 and 2 have the same area and the same perimeter.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

Let l_1 and b_1 be the length and the breadth of the first rectangle, respectively, and l_2 and b_2 be the length and the breadth of the second rectangle, respectively.
Given that the area of the two rectangles are equal.
दिलेले आहे: आयत 1 आणि आयत 2 यांचे क्षेत्रफळ समान आणि परिमिती समान आहे.
l_1 व b_1 ही पहिल्या आयताची अनुक्रमे लांबी आणि रुंदी आहे आणि l_2 व b_2 ही दुसऱ्या आयताची अनुक्रमे लांबी आणि रुंदी आहे.
दोन्ही आयतांचे क्षेत्रफळ समान आहे, हे दिले आहे.

So, $l_1 \times b_1 = l_2 \times b_2$ .... (I)
and आणि $2(l_1 + b_1) = 2(l_2 + b_2)$
$l_1 + b_1 = l_2 + b_2$ .... (II)
From (I) and (II) we have,
$l_1 = l_2 + b_2 - b_1$ ------------(III)
So substituting (III) in (I),
$(l_2 + b_2 - b_1) \times b_1 = l_2 \times b_2$
So, $l_2 b_1 + b_2 b_1 - b_1^2 = l_2 b_2$
$b_1 b_2 - b_1^2 = l_2 b_2 - l_2 b_1$
Therefore, $b_1(b_2 - b_1) = l_2(b_2 - b_1)$
Hence, $(b_1 - l_2) \times (b_2 - b_1) = 0$
So, either $b_2 = b_1$ or $l_2 = b_1$
If $b_2 = b_1$, then $l_2 = l_1$ .... from (I).
If $l_2 = b_1$, then $l_1 = b_2$ ......from (I).

तर, $l_1 \times b_1 = l_2 \times b_2$ .... (I)
आणि $2(l_1 + b_1) = 2(l_2 + b_2)$
$l_1 + b_1 = l_2 + b_2$ .... (II)
(I) आणि (II) वरून आपल्याकडे
$l_1 = l_2 + b_2 - b_1$ ------------(III) आहे
त्यामुळे (I) मध्ये (III) बदलणे,
$(l_2 + b_2 - b_1) \times b_1 = l_2 \times b_2$
तर, $l_2 b_1 + b_2 b_1 - b_1^2 = l_2 b_2$
$b_1 b_2 - b_1^2 = l_2 b_2 - l_2 b_1$
म्हणून, $b_1(b_2 - b_1) = l_2(b_2 - b_1)$
म्हणून, $(b_1 - l_2) \times (b_2 - b_1) = 0$
तर, एकतर $b_2 = b_1$ किंवा $l_2 = b_1$
जर $b_2 = b_1$, तर $l_2 = l_1$ ....(I) वरून.
जर $l_2 = b_1$, तर $l_1 = b_2$ ......(I) वरून.

In either case, the two rectangles are congruent as there are corresponding sides that are equal and all the angles are equal.
वरील दोन्ही पर्यायांमध्ये, दोन्ही आयत एकरूप आहेत कारण त्यांच्या लगतच्या बाजू समान आहेत आणि सर्व कोन समान आहेत.

Let the students explore the following questions, on a grid paper. You can also ask them to check for more such patterns.
विद्यार्थ्यांना पुढील प्रश्नांची उत्तरे चौकट कागदावर शोधू द्या. तुम्ही त्यांना असेच आणखी आकृतीबंध शोधायला सांगू शकता.

Task 8: More with the grid...!
कृती 8: चौकटीबरोबर आणखी काही...!

Remember that all the vertices of all the figures that you draw should be grid points. Use the grid paper, explore and find answers to the following:
लक्षात ठेवा, तुम्ही काढलेल्या सर्व आकृत्यांचे सर्व शिरोबिंदू हे चौकट-बिंदूवर असले पाहिजेत. चौकट-कागदाचा वापर करा आणि पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा.

1. If the length and the breadth of a rectangle are natural numbers, and its area is an odd number, what can you say about that rectangle's semi-perimeter (half of the perimeter)?
   जर आयताची लांबी आणि रुंदी या नैसर्गिक संख्या असतील, आणि त्याचे क्षेत्रफळ ही विषम संख्या असेल, तर त्या

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

आयताच्या अर्धपरिमितीसंबंधी तुम्ही काय सांगाल?

If the area is odd, it means that the length and the breadth are both odd. And hence their sum, which is the semi-perimeter, is even.
जर क्षेत्रफळ विषम संख्या असेल, तर याचा अर्थ लांबी आणि रुंदी दोन्ही विषम आहेत. आणि म्हणून त्यांची बेरीज म्हणजेच अर्धपरिमिती सम संख्या असेल.

2. If the length and the breadth of a rectangle are natural numbers, and its semi-perimeter is an odd number, what can you say about the area of this rectangle?
जर आयताची लांबी आणि रुंदी या नैसर्गिक संख्या असतील, आणि त्याची अर्धपरिमिती ही विषम संख्या असेल, तर त्या आयताच्या क्षेत्रफळासंबंधी तुम्ही काय सांगाल?

If the semi-perimeter is odd, it means that either the length is an odd number or the breadth is an odd number, and the other is even. And hence their product, which is the area, is even.
जर अर्धपरिमिती विषम असेल, तर याचा अर्थ एकतर लांबी विषम संख्या असेल किंवा रुंदी विषम संख्या असेल, आणि दुसरी संख्या सम असेल. म्हणूनच त्यांचा गुणाकार म्हणजे क्षेत्रफळ सम संख्या असेल.

8. What are the different possible areas of triangles drawn on the grid? Are all the multiples of half achieved?
चौकट-कागदावर काढलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे काय-काय असू शकतात? आपल्याला अर्ध्याच्या सर्व पटी मिळाल्या आहेत का?

All the multiples of half can be achieved. For example, look at the triangles given in figure T7. If you continue this process then you can get any multiple of half.
अर्धा चौरस एककाच्या पटीतील सर्व क्षेत्रफळे मिळतील. उदाहरणार्थ, *आकृती T7* मध्ये दिलेले त्रिकोण पहा. जर तुम्ही ही प्रक्रिया चालू ठेवली, तर तुम्हाला अर्ध्याचे कोणतेही गुणक मिळू शकतात.

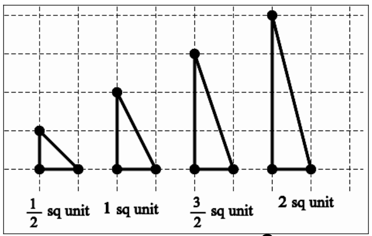

Figure T7 *आकृती T7*

9. What are the possible areas of grid squares (squares with vertices on the grid)? (These may not have integer sides!)
चौकट-कागदावर काढलेल्या चौरसांचे क्षेत्रफळ काय असू शकते? (चौरसांची बाजू पूर्णांक संख्या असतील, असे नाही)

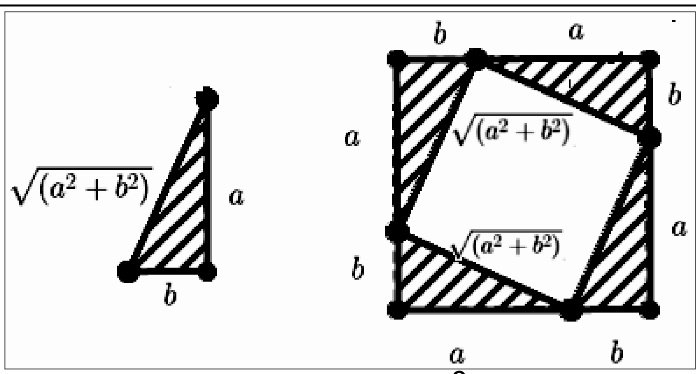

Figure T8 *आकृती 8*

It will be obvious to the students, that for a perfect square number one can always draw a square whose area is equal to that perfect square (side is equal to the square root). Ask the students if there are any other possibilities. You might have to give them hints to start looking at other possibilities. For example,

I: Consider a right-angled triangle of sides *a* units and *b* units (see figure T8), then the length of the hypotenuse is $\sqrt{(a^2+b^2)}$ units.

विद्यार्थ्यांना हे स्पष्ट असेल, की पूर्ण वर्ग संख्येसाठी ते असा एक चौरस काढू शकतात ज्याचे क्षेत्रफळ त्या संख्येइतकेच आहे (चौरसाची बाजू ही पूर्ण वर्ग संख्येच्या वर्गमूळाएवढी आहे). इतर काही शक्यता आहेत का, ते विद्यार्थ्यांना विचारा. इतर शक्यता शोधण्यासाठी कदाचित तुम्हाला त्यांना सूचनिका (hints) द्याव्या लागतील. उदाहरणार्थ,

I: a आणि b एकक बाजू असलेला काटकोन त्रिकोण घ्या (*आकृती T8* पहा), तर कर्णाची लांबी $\sqrt{(a^2+b^2)}$ एकक आहे.

If you draw a square of side *a+b* units in such a way then, the side of the inscribed square is $\sqrt{(a^2+b^2)}$ units.

So, the area of the inscribed square is a^2+b^2 square units.

जर तुम्ही बाजू *a+b* एकक असलेला चौरस *आकृती T8* मध्ये दाखवल्याप्रमाणे काढला तर आंतर-चौरसाची बाजू $\sqrt{(a^2+b^2)}$ एकक असेल. म्हणून आंतर-चौरसाचे क्षेत्रफळ a^2+b^2 चौरस एकक होईल.

More importantly, the side of any tilted square can be written as a square root of the sum of two squares, for example $\sqrt{(a^2+b^2)}$

महत्त्वाचे म्हणजे चौकट-कागदावरील कोणत्याही तिरक्या चौरसाची बाजू दोन वर्गांच्या बेरजेचे वर्गमूळ म्हणून लिहिता येईल. उदाहरणार्थ, $\sqrt{(a^2+b^2)}$

II. Also given any tilted square like the one in *figure T9 (A)*, it can be seen that the side of that square is of the form, $\sqrt{(a^2+b^2)}$ units (see *figure T9 (B)*).

Here it is clear that the length of the side of the given square is equal to $\sqrt{(a^2+b^2)}$.

II. तसेच *आकृती T9* (A) प्रमाणे कोणताही तिरका चौरस घेतल्यास त्या चौरसाची बाजू $\sqrt{(a^2+b^2)}$ एककाच्या रूपात असते (*आकृती T9* (B) पहा).

येथे हे स्पष्ट आहे की दिलेल्या चौरसाच्या बाजूची लांबी $\sqrt{(a^2+b^2)}$ एवढी आहे

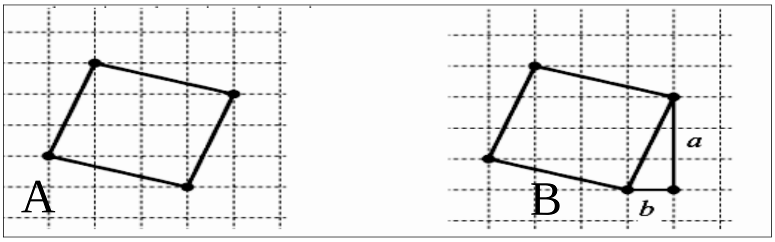

Figure T9 ***आकृती T9***

From (I) and (II), it is clear that, for any number which can be written as the sum of two squares, one can draw a square whose area would be that number.

(I) आणि (II) वरून, हे स्पष्ट होते की, दोन वर्गसंख्यांची बेरीज म्हणून लिहिता येणाऱ्या कोणत्याही संख्येसाठी एक चौरस काढता येईल, ज्याचे क्षेत्रफळ ती संख्या असेल.

5. What are the possible areas of tilted rectangles (rectangles with vertices on the grid)? (Hint: Look at the tilted squares first).

तुम्ही काढलेल्या तिरक्या आयतांची क्षेत्रफळे काय असू शकतात? (टीप: आधी काढलेले तिरके चौरस पहा).

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January 2023

Suggested readings

1. An interesting exploration of area and perimeter of triangles: De, P, Sircar, S, Titus, S (2017): LFHC - Area, Perimeter and Congruency (APC), At Right Angles November 2017, Azim Premji Foundation (https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-november-2017-LFHC-area-perimeter-congruency.aspx)
2. A book which talks about Pedagogical Content Knowledge: Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Chapter 4.
3. A presentation on mathematical proofs and examples of proofs: N.J.: Lawrence Erlbaum Associates- https://study.com/academy/lesson/mathematical-proof-definition-examples-quiz.html
4. A short course on mathematical languages and language of proofs- https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf

References

संदर्भ

- De, P., Sircar, S., & Titus, S. (2017) November. LFHC - Area, perimeter and congruency (APC). At Right Angles, 6 (3), 53-58. Azim Premji Foundation. Retrieved from https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-november-2017-LFHC-area-perimeter-congruency.aspx
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers’ understanding of fundamental mathematics in China and the United States. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Credits
Main Authors: Aaloka Kanhere, K. Subramaniam
Reviewers: Amber Habib, Amol Dighe, H.C. Pradhan, Jonaki Ghosh, Sneha Titus
Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam
Marathi Translator: Pranali Parab
Marathi Editorial Team: Deepa Chari, Aaloka Kanhere, Vijay D. Lale

Creative Commons Licence: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE