LU 8.11 An experiment on measuring volumes

चला आकारमान मोजूया!

Overview
आढावा

The story of crow and the pitcher (a kind of pot for holding water) from the collection of Aesop's Fables is very popular among children. Using this simple story, we can explore the concept of volume of solids and liquids with the students. In this Learning Unit, students learn how to estimate the volumes of different bodies by immersing them in water. We also introduce the idea of the packing of solids, i.e., when you try to pack together (or put together) many solid objects, there may be some gaps in between. Due to this property of solids, the crow may not be successful in raising the level of water beyond a certain limit.
इसापच्या दंतकथांपैकी तहानलेला कावळा आणि पाण्याची घागर ही कथा बालकांमध्ये खूप लोकप्रिय आहे. या साध्या कथेचा वापर करून आपण विद्यार्थ्यांना स्थायू आणि द्रव पदार्थांच्या आकारमानाची संकल्पना समजावून देऊ शकतो. या अध्ययन घटकात, विद्यार्थी वेगवेगळ्या वस्तू पाण्यात बुडवून त्यांच्या आकारमानाचा अंदाज कसा लावायचा, हे शिकतील. येथे आपण स्थायू पदार्थांच्या बांधणीच्या (packing) कल्पनेबाबत ओळख करून घेणार आहोत. याचा अर्थ, जेव्हा आपण अनेक स्थायू अवस्थेतील वस्तू एकत्र बांधण्याचा (किंवा एकत्र ठेवण्याचा) प्रयत्न करतो, तेव्हा त्यांच्यात काही पोकळ जागा राहू शकतात. स्थायू पदार्थांच्या याच गुणधर्मामुळे, कावळ्याला पाण्याची पातळी एका विशिष्ट पातळीपेक्षा अधिक वाढवण्यात कदाचित यश मिळत नाही.

Minimum time required: Three sessions of 40 mins each.
किमान आवश्यक वेळ : 40 मिनिटांची तीन सत्रे

Type of Learning Unit: Classroom
अध्ययन घटकाचा प्रकार : वर्गात

Unit-specific objectives:
अध्ययन घटकाची उद्दिष्टे :

- To make a marked transparent cylinder and use it to measure the volume of liquids
  एक खुणा केलेले (अंशांकित), पारदर्शक मोजपात्र बनवणे आणि त्याचा वापर द्रवाचे आकारमान मोजण्यासाठी करणे
- To use the volume of fluid displaced by submerged bodies to measure the volume of solids that do not dissolve in water
  पाण्यात न विरघळणाऱ्या स्थायू पदार्थांना पाण्यात बुडवल्यावर, विस्थापित झालेल्या पाण्याचा वापर करून, त्या स्थायू पदार्थांचे आकारमान मोजणे
- To understand the importance of the least count of a measuring instrument, and its use in finding the accuracy of volume measurement
  आकारमान अचूकपणे मोजण्यासाठी मापकाच्या लघुतम मापाचे महत्व आणि त्याचा वापर समजून घेणे
- To develop an intuitive understanding of the concept of packing fraction
  बंधनांश (Packing fraction) बाबत तर्कशुद्ध समज विकसित करणे

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

Links to curriculum
अभ्यासक्रमाशी दुवा

1. NCERT Class 7 Science Textbook: Chapter 9, Soil (Feb 2006), (relates to the concept of water that can be held in pore spaces of soil/rock pieces)
2. NCERT Class 8 Mathematics Textbook: Chapter 11, Mensuration (Nov 2022),(the formulas from this chapter are not directly required here, but this unit helps students internalise some of the ideas of volume measurements)

Learning from "The crow and the pitcher" story

Do you remember the childhood fable of the crow and the pitcher? (See *Figure 1*.) In this unit, we will imitate the crow in the story and use the concept that ‘a body submerged in water displaces an amount of water equivalent to its volume’, to carry out some measurements. The last task (#5) in this unit is closely related to the tale — and you may reach a surprising conclusion at the end of it!

तुमच्या लहानपणी एक तहानलेला कावळा आणि पाण्याच्या घागरीची गोष्ट तुम्ही ऐकलेली आठवते का? (*आकृती 1* पहा). या अध्ययन घटकात, आपण गोष्टीतील कावळ्याच्या कृतीचे अनुकरण करून ‘एखादी वस्तू पाण्यात टाकली असता वस्तू तिच्या आकारमानाइतके पाणी विस्थापित करते’ हे तत्त्व वापरून काही मापने घेणार आहोत. शेवटची कृती (#5) आणि या दंतकथेचा जवळचा संबंध आहे — अध्ययन घटकाच्या शेवटी तुम्हाला एक आश्चर्यकारक निष्कर्ष मिळेल!

Figure 1: *The Crow and the Pitcher*
आकृती 1: *कावळा आणि पाण्याची घागर*

Are you familiar with these ideas?
तुम्हाला पुढील संकल्पना माहीत आहेत का?

- Volume
  आकारमान

Students should be familiar with the concept of volume in general and also the formula for volume of a sphere.
विद्यार्थ्यांना सामान्यपणे आकारमानाची संकल्पना आणि गोलाच्या आकारमानाचे सूत्रदेखील माहीत असायला हवे.

- Displacement of fluids by solid objects
  स्थायू वस्तूंद्वारे द्रव पदार्थांचे होणारे विस्थापन

Students should be aware that when a non-porous solid body is immersed in a fluid, it displaces fluid equal to its own volume. Familiarity with the Archimedes’ principle of buoyancy is **not** necessary for this task.
विद्यार्थ्यांनी हे लक्षात घेतले पाहिजे की जेव्हा सघन (सच्छिद्र नसलेला) स्थायूरूप वस्तू द्रवामध्ये बुडवली जाते, तेव्हा ती वस्तू स्वतःच्या आकारमानाइतके द्रव विस्थापित करते. या कृतीसाठी आर्किमिडीजचे (Archimedes’) **प्लावकतेचे तत्त्व माहीत असणे आवश्यक नाही.**

- Average/ Mean
  सरासरी

Students should be familiar with the concept of the average of several quantities.
विद्यार्थ्यांना राशींची सरासरी कशी काढतात, ही संकल्पना माहीत असायला हवी.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

Materials required:
कृतीसाठी लागणारे साहित्य:

- A narrow transparent cylinder (or a transparent 500 mL water bottle with the top cut off; the cylinder need not have uniform diameter across its length)
  अरुंद तोंडाचे एक पारदर्शक मोजपात्र (किंवा तोंडाकडे कापलेली 500 मिली. पाण्याची रिकामी बाटली; मोजपात्राचा व्यास लांबीभर एकसमान असण्याची गरज नाही)
- Glass marbles (~40) of similar size
  साधारणपणे सारख्याच आकाराच्या काचेच्या गोट्या (सुमारे 40)
- Small irregular stone which can fit into the cylinder comfortably (see note in task 4)
  मोजपात्रात सहजपणे जाईल असा लहान, अनियमित आकाराचा दगड (कृती 4 मधील टीप पहा)
- Ruler
  फूटपट्टी
- Marker pen (fine-tipped)
  खुणा करण्यासाठी निमुळते टोक असलेला मार्कर पेन
- Straight edge (like another ruler or edge of a notebook)
  सरळ कडा असलेली वस्तू (दुसरी फूटपट्टी किंवा वहीची कडा)
- Beaker (with graduated volume markings)
  आकारमानाच्या खुणा असलेले अंशांकित चंचुपात्र
- A tray or tough may be kept to collect water spills
  पाणी सांडू नये यासाठी ट्रे किंवा पसरट भांडे

Task 1: Creating your own volume measuring instrument (a graduated cylinder)
कृती 1: आकारमान मोजण्यासाठी स्वतःचे साधन तयार करणे (अंशांकित मोजपात्र)

i. Use a beaker to carefully measure 50 mL water and transfer it to the transparent cylinder. Mark the height of the water column on the cylinder using a marker pen.
   50 मिली. पाणी अचूकपणे मोजण्यासाठी एक चंचुपात्र घ्या आणि तुम्ही बनवलेल्या पारदर्शक मोजपात्रात न सांडता ओता. या मोजपात्रात 50 मिली. पाण्याची पातळी जेथे आहे, तेथे मार्कर पेन वापरून 50 मिली. म्हणून खूण करा.

ii. Repeat this till the cylinder is almost full, marking successive heights at the steps of 50 mL.
   अशा प्रकारे, हे मोजपात्र पूर्ण भरेपर्यंत ही कृती पुन्हापुन्हा करा. प्रत्येक वेळी 50 मिली. पाणी भरल्यानंतर पाण्याची पातळी जेथे पोहोचेल, तेथे मोजपात्रावर खूण करा.

iii. Label the markings with appropriate multiples of 50 mL (50, 100, 150,..).
   आता, मोजपात्रावर प्रत्येक 50 मिली. पाणी भरल्यानंतर 50 मिली., 100 मिली., 150 मिली., … अशा खुणा करा.

   Now you have a graduated cylinder which measures volume. You will notice that we can use this cylinder to measure volume only in multiples of 50 mL. Hence, 50 mL is the least count of this graduated cylinder. If the water level is between two markings, we take the reading as the mark that is closest to the water level.
   आता तुमच्याजवळ एक अंशांकित मोजपात्र आहे आणि आकारमान मोजण्यासाठी तुम्ही त्याचा वापर करू शकता. तुमच्या लक्षात आले असेल की या अंशांकित मोजपात्राने कमीत कमी आणि फक्त 50 मिली.च्या पटीतील आकारमान आपण मोजू शकतो. म्हणून, या अंशांकित मोजपात्राचे लघुतम माप 50 मिली. आहे, असे म्हणता येईल. जर पाण्याची पातळी दोन खुणांच्या दरम्यान असेल, तर पाण्याची पातळी मोजपात्रावरील ज्या खुणेजवळ असेल, ते मापन आपण घेतो.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

The maximum volume your graduated cylinder can measure is (Highest marking on the cylinder)
तुमचे अंशांकित मोजपात्र सर्वांत जास्त किती आकारमान मोजू शकते? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Here it would be useful to discuss the concept of least count with the students. In this context, the least count would be 50 mL.
येथे विद्यार्थ्यांबरोबर ‘लघुतम माप’ संकल्पनेवर चर्चा करणे उपयोगी ठरेल. या कृतीमध्ये, लघुतम माप 50 मिली. आहे.

- In task 4, we will see how to increase the accuracy of this graduated cylinder beyond the current least count.
  कृती 4 मध्ये, आपण खुणा केलेल्या मोजपात्राची अचूकता तत्कालिन लघुतम मापापेक्षा कशी वाढवायची, ते पाहू.
- The graduated cylinders prepared by the students in this task can also be reused for other experimental purposes.
  या कृतीमध्ये विद्यार्थ्यांनी बनवलेले मोजपात्र इतर प्रायोगिक कृतींसाठीही वापरता येईल.
- You may make suitable modifications to the instructions above. For example, if there is a beaker which measures 25 mL instead of 50 mL, then the transparent cylinder could have markings for every 25 mL. However, reducing this least count of the cylinder should be avoided as it may increase error in measurements because of non-uniformity in shape of the bottle and errors in making marks. Lower least count of this cylinder may also prompt students to take fewer number of marbles, which will lead to measuring volume change for lesser number of marbles increasing the relative error in volume per marble.
  वर दिलेल्या सूचनांमध्ये तुम्ही योग्य ते बदल करू शकता. उदाहरणार्थ, तुमच्याकडे 50 मिली.ऐवजी जर 25 मिली. मोजणारे चंचुपात्र असेल, तर पारदर्शक दंडगोल पात्रावर (नळकांड्यावर) प्रत्येक 25 मिली. साठी खुणा असू शकतात. मात्र, या दंडगोल पात्राचे लघुतम माप ‘कमी’ करणे, टाळायला हवे. कारण प्लास्टिकच्या बाटलीचे आकार एकसमान नसल्याने आणि खुणा करताना चुका झाल्यास, मापनामध्ये त्रुटी वाढू शकतात. या दंडगोल पात्राचे लघुतम माप कमी असल्यास विद्यार्थी कमी गोट्या घेतील, ज्यामुळे कमी गोट्यांच्या आकारमानात झालेला बदल मोजला जाईल आणि म्हणून प्रत्येक गोटीच्या आकारमानातील सापेक्ष त्रुटी वाढेल.
- Some labs may have a graduated beaker, or a graduated transparent cylinder, which is already marked. If the beaker or cylinder is large enough it could be used directly by one of the student groups. But do encourage the students to also prepare their own measuring cylinder. The results obtained with the marked cylinder and the beaker could then be compared. Before beginning, ask the students to observe the graduated beaker carefully and find its least count.
  काही प्रयोगशाळांमध्ये चंचुपात्र किंवा मोजपात्र असू शकतात, ज्यावर आधीच मोजण्यासाठीच्या खुणा असतात. चंचुपात्र किंवा दंडगोल पात्र पुरेसे मोठे असेल, तर ते विद्यार्थ्यांच्या गटांपैकी कोणत्याही गटाला वापरता येईल. परंतु विद्यार्थ्यांना स्वतःचे मोजपात्र बनवायला प्रोत्साहित करा. विद्यार्थ्यांनी बनविलेले मोजपात्र आणि चंचुपात्र वापरून मिळालेल्या परिणामांची तुलना करता येऊ शकते. सुरुवात करण्याआधी, विद्यार्थ्यांना चंचुपात्राचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करायला सांगा आणि त्याचे लघुतम माप काढायला सांगा.

Task 2: Measuring the average volume of marbles
कृती 2: गोट्यांचे सरासरी आकारमान मोजणे

i. Take the empty graduated cylinder and fill it up to the 200 mL mark.
   आता रिकामे अंशांकित मोजपात्र घ्या आणि त्यात 200 मिली. खुणेपर्यंत पाणी भरा.

i. Drop the marbles in the cylinder, one by one while counting them, until the water level rises up to the next mark. Ensure that all the marbles are fully submerged in water. That is, the level of the water should be above all the marbles. The water level rises because each marble displaces an amount of water equal to its own volume.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

मोजपात्रात एक-एक मोजत गोटी पाण्यात टाकत रहा, जोपर्यंत पाण्याची पातळी पुढच्या खुणेपर्यंत वाढत नाही. खात्री करा की सर्व गोट्या पाण्यात पूर्णपणे बुडलेल्या आहेत. म्हणजेच पाण्याची पातळी सर्व गोट्यांच्या वर पोहोचली आहे. मोजपात्रातील पाण्याची पातळी वाढते कारण प्रत्येक गोटी तिच्या स्वतःच्या आकारमानाएवढे पाणी विस्थापित करते.

If the water level is between two markings, we take the reading as the mark that is closest to the water level.
जर पाण्याची पातळी दोन खुणांच्या दरम्यान असेल, तर पाण्याची पातळी मोजपात्रावरील ज्या खुणेजवळ असेल, ते मापन आपण घेतो.

Volume of water before adding marbles .
गोट्या पाण्यात टाकण्यापूर्वी पाण्याची पातळी ________________________________

Volume of water after adding marbles .
गोट्या पाण्यात टाकल्यानंतर वाढलेली पाण्याची पातळी ______________________________

Number of marbles required to raise the water level to the next mark ______________________.
Thus, _________ marbles displace ____________ volume of water.
पाण्याची पातळी पुढच्या खुणेपर्यंत वाढण्यासाठी पाण्यात टाकलेल्या गोट्यांची संख्या _________ अशा प्रकारे, _________ गोट्यांमुळे पाण्याच्या पातळीत ___________मिली. एवढी वाढ झाली.

ii. Use this result to estimate the average volume of one marble, obtained experimentally (V_{exp}).
प्रयोगातून मिळालेल्या वाचनांचा वापर करा आणि एका गोटीचे सरासरी आकारमान काढा (V_{exp}).

Average volume of one marble .
एका गोटीचे सरासरी आकारमान ______________________.

- It is possible that the students may not get the water level exactly up to a mark on the transparent cylinder. If the water level is below a certain mark, for say 20 marbles and goes above this mark for 21 marbles, then in such case, the number of marbles making up the difference in volume may be taken as 20 or 21 depending on if the 21st marble is submerged more or less than half and closeness of water level to the mark.
अशी शक्यता आहे की विद्यार्थ्यांनी बनवलेल्या पारदर्शक मोजपात्रावर पाण्याची पातळी तंतोतंत खुणेबरोबर जुळणार नाही. जर 20 गोट्या मोजपात्रात टाकल्यावर पाण्याची पातळी एका ठरावीक खुणेच्या खाली असेल आणि 21 वी गोटी टाकल्यावर त्या खुणेपेक्षा वर जात असेल, तर अशा स्थितीमध्ये, आकारमानात फरक करणाऱ्या गोट्यांची संख्या 20 किंवा 21 घ्यायची हे 21 वी गोटी पाण्यात अर्ध्यापेक्षा कमी किंवा जास्त बुडलेली आहे, यावर अवलंबून असेल.
- Moreover, the topmost marbles must be submerged while measuring volume. If there are air spaces between the top marbles, some marbles may be removed till such spaces are no more observed. Alternatively, the task may be repeated with a larger starting volume of water.
शिवाय आकारमान मोजताना सर्वांत वरच्या गोट्यादेखील पाण्यात बुडलेल्या असणे, आवश्यक आहे. जर वरच्या काठावरील गोट्यांमध्ये मोकळ्या जागा असतील तर काही गोट्या काढून ठेवा, जोपर्यंत अशा मोकळ्या जागा बाकी राहणार नाहीत. याला एक पर्याय म्हणजे, सुरुवातीला पाणी जास्त प्रमाणात घेऊन ही कृती पुन्हा करून पाहू शकता.
- The students may be given a hint to first obtain the volume for “*n*” marbles in this task and then the average volume of one marble. Note that all the marbles are nearly equal in volume, but not exactly equal. This is why it makes sense to talk of an average volume and take it as an estimate of the volume of one marble.
या कृतीमध्ये प्रथम ‘*n*’ गोट्यांचे आकारमान काढायचे आहे आणि नंतर एका गोटीचे सरासरी आकारमान मोजायचे आहे, यासाठी विद्यार्थ्यांना एखादी सूचनिका (hint) देता येईल. लक्षात घ्या की, सर्व गोट्यांचे आकारमान जवळपास सारखे आहे, परंतु अगदी समान नाही. म्हणूनच गोट्यांचे सरासरी आकारमान काढणे आणि ते आकारमान एका गोटीचे अंदाजे आकारमान म्हणून गृहीत धरणे, याला अर्थ आहे.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

- When we performed this task, the result we obtained for the set of marbles that we had was about 50 mL for 25 marbles, which meant that the average volume of one marble was about 2 mL.
  जेव्हा आम्ही ही कृती केली, तेव्हा 25 गोटयांनी विस्थापित केलेले पाणी सुमारे 50 मिली. होते, म्हणजे एक गोटीचे सरासरी आकारमान सुमारे 2 मिली. असेल.

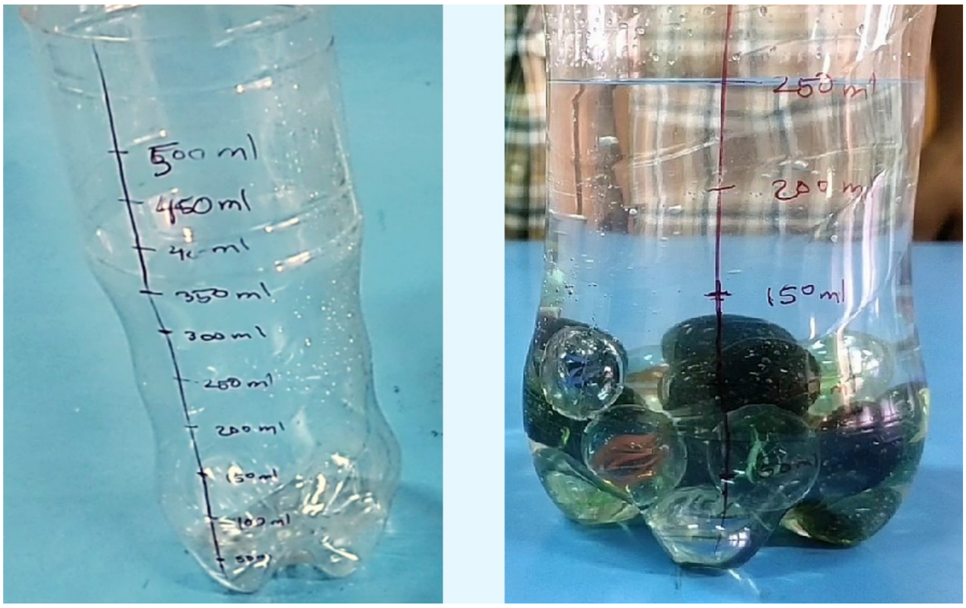

Figure T1: *(Left) A measuring cylinder and (Right) A measuring cylinder with water and marbles*
आकृती T1: *(डावीकडे) मोजपात्र आणि (उजवीकडे) पाणी आणि गोट्या यांनी भरलेला मोजपात्र*

Task 3: Comparing the volume of a marble estimated by two different methods
कृती 3: दोन भिन्न पद्धतींनी मोजलेल्या गोटीच्या आकारमानांची तुलना करणे

i. Keep ten marbles in a straight line touching each other. (You can create a long narrow channel by placing a straight edge and a ruler parallel to one another with a gap in between, with the marbles lined up in the gap.)
दहा गोट्या एकमेकांना चिकटून एका सरळ रेषेत ठेवा. तुम्ही एका बाजूला फूटपट्टी आणि दुसऱ्या बाजूला एक सरळ कडा असलेली वस्तू ठेवून लांब पन्हळीसारखी व्यवस्था करू शकता आणि त्या पन्हळीमध्ये गोट्या एकमेकांना चिकटून ठेवू शकता. दोन फूटपट्ट्यांच्या मध्ये गोट्या एकमेकांना चिकटून ठेवा.

ii. Measure the end-to-end length of the line of marbles.
सरळ रेषेतील गोट्यांची एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंत लांबी मोजा.

End-to-end length of ten marbles
दहा गोट्यांची एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंत लांबी ______________________________.

iii. Use this measurement to estimate the average radius of the marbles.
या मापनांचा वापर करून गोट्यांची अंदाजे सरासरी त्रिज्या काढा.

Average radius of one marble
एका गोटीची सरासरी त्रिज्या =____________________________________

iv. Calculate the volume of a marble (sphere) $V_{calc}=\frac{4}{3}\times\pi\times r^3$ using the radius you have obtained.
एका गोटीचे (गोल) आकारमान $V_{calc}=\frac{4}{3}\times\pi\times r^3$ काढण्यासाठी तुम्हाला मिळालेली त्रिज्या वापरा.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

Volume of one marble (obtained using the formula)
एका गोटीचे आकारमान = ____

v. You may notice that the volumes obtained by these two methods differ slightly from each other. One can estimate percentage difference as the ratio (expressed in percentage) of “the difference in volume” to “the volume of a marble” (by either method).
वरील दोन्ही पद्धतींनी मिळालेल्या आकारमानांमध्ये किंचित फरक आहे, हे तुमच्या लक्षात आले असेल. हा फरक किती टक्के आहे तो 'आकारमानातील फरक' (टक्क्यांमध्ये मांडलेले) आणि 'गोटीचे आकारमान' (कोणत्याही एका पद्धतीने काढलेले) यांच्या गुणोत्तरावरून अंदाजे काढता येतो

Percentage difference =
फरक टक्क्यांमध्ये = ________________

- Dividing the end-to-end length by the number of marbles will give the mean diameter of the marbles. Have a discussion with the students on whether the diameter of each marble is exactly equal to the answer they wrote. If not, what does this answer signify?
एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंत जी लांबी मिळते, त्या लांबीच्या अंतरात ठेवलेल्या गोट्यांच्या संख्येने भाग दिल्यास एका गोटीचा सरासरी व्यास मिळेल. प्रत्येक गोटीचा व्यास विद्यार्थ्यांनी लिहिलेल्या उत्तराएवढा आहे की नाही, यावर विद्यार्थ्यांशी चर्चा करा. असे नसेल, तर या उत्तरातून काय अर्थ निघतो?
- For our set of marbles, the end-to-end length of the line of marbles was (for 10 marbles) ~ 15.1 cm, i.e., the average diameter of a marble was about 1.51 cm. This gives the volume of one marble as $\left(\frac{4}{3}\right)\times\pi\times r^3=\left(\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{22}{7}\right)\times\left(\frac{1.5}{2}\right)^3$ = 1.77 ml.
आमच्याजवळील गोट्यांपासून (10 गोट्यांसाठी) जी रेषा तयार झाली त्या रेषेची एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंतची लांबी ~ 15.1 सेंमी. होती. म्हणजेच गोटीचा सरासरी व्यास सुमारे 1.51 सेंमी. होता. यावरून एका गोटीचे आकारमान $\left(\frac{4}{3}\right)\times\pi\times r^3=\left(\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{22}{7}\right)\times\left(\frac{1.5}{2}\right)^3$ = 1.77 मिली. एवढे होते.
- The expression for the percentage difference can be written as: $\frac{V_{calc}-V_{exp}}{\left(V_{calc}\, or\, V_{exp}\right)}\times 100$ %
- फरकाची टक्केवारी पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल $\frac{V_{calc}-V_{exp}}{\left(V_{calc}\, or\, V_{exp}\right)}\times 100$ %
- We are using the percentage difference instead of percentage error, because among the two methods, we cannot say which is the accurate measurement. Both methods have inherent possibility of measurement errors.
येथे त्रुटीची टक्केवारी ऐवजी फरकाची टक्केवारी वापरली आहे. कारण दोन पद्धतींपैकी अचूक मापन कोणते, हे आपण सांगू शकत नाही. दोन्ही पद्धतींमध्ये, मापन करताना त्रुटी उद्भवण्याची शक्यता आहे.
- The teacher can explain the concept of error qualitatively as follows: There is a clear discrepancy in the volume of one marble obtained in task 2 and that obtained in task 3. This is because in task 2, we calculate the average volume of one marble directly without finding the radius of marbles. On the other hand, in task 3, we find the average radius of a marble and then calculate the volume. In this process, any error in the measurement of the radius leads to larger error in volume as the radius gets cubed (due to $\frac{4}{3}\times\pi\times r^3$). This error can be minimised by increasing the number of marbles taken to measure the end-to-end length and then calculating the corresponding average radius of one marble.
गुणात्मकरीत्या त्रुटीची संकल्पना शिक्षक पुढीलप्रमाणे समजावून सांगू शकतात: कृती 2 आणि कृती 3 यांत मिळालेल्या

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

एका गोटीच्या आकारमानात निश्चितच फरक आहे. याचे कारण कृती 2 मध्ये, आपण गोट्यांची त्रिज्या न मोजता थेट आकारमान काढतो. कृती 3 मध्ये, आपण गोट्यांची सरासरी त्रिज्या काढतो आणि नंतर घनफळ मोजतो. कृती 3 मध्ये, त्रिज्या मोजताना कोणतीही त्रुटी झाली तर आकारमानात मोठी त्रुटी निर्माण होते, कारण त्रिज्येचा घन होतो $(\frac{4}{3}\times\pi\times r^3)$. एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंत लांबी मोजण्यासाठी गोट्यांची संख्या वाढवली आणि नंतर एका गोटीची सरासरी त्रिज्या मोजली तर ही त्रुटी कमी होते.

- Note that the mean volume of marbles is obtained here to a greater accuracy than the accuracy imposed by the least count of our "manufactured" measuring cylinder.
  लक्षात घ्या की, येथे कृती 3 मध्ये मिळालेले सरासरी आकारमान हे कृती 2 मध्ये मिळालेल्या आकारमानापेक्षा अधिक अचूक आहे. कृती 2 मध्ये बनविलेल्या मोजपात्राच्या लघुतम मापामुळे आकारमानातील अचूकता कमी होते.
- Possible extension: If the students want, they can repeat this with more marbles and/or with random sets of ten marbles each. Will the calculated average volume now be closer to that obtained in task 2?
  संभाव्य विस्तार: जर विद्यार्थ्यांची इच्छा असेल तर ते अधिक गोट्या घेऊन आणि/किंवा प्रत्येकजण दहा गोट्यांचा संच घेऊन ही कृती पुन्हा करू शकतात. या कृतीतून मोजलेले सरासरी आकारमान हे कृती 2 मधील आकारमानाच्या जवळपास असेल का?
- Possible extension: Students may also try repeating the tasks 2 and 3 using machined steel balls (like those used in ball bearings) of a size similar to that of the marbles. Since these are usually manufactured to a higher degree of precision than the marbles, the discrepancy in the volume obtained in task 2 and that obtained in task 3 will be smaller.
  संभाव्य विस्तार: विद्यार्थी गोट्यांच्या आकारासारख्याच असलेल्या यंत्रातील स्टीलच्या गोळ्या (जसे, बॉल बेअरिंगमधल्या गोळ्या) वापरून कृती 2 आणि कृती 3 करण्याचा प्रयत्न करू शकतात. या स्टीलच्या गोळ्या सामान्यपणे गोट्यांपेक्षाही अधिक अचूकतेने तयार केल्या जात असल्याने, कृती 2 आणि कृती 3 यांमधून मिळालेल्या आकारमानात जो फरक आहे तो फरकदेखील कमी होऊ शकतो.

Task 4: Measuring the volume of an irregular stone
कृती 4: अनियमित आकाराच्या दगडाचे आकारमान मोजणे

i. Fill the cylinder with water to the 200 mL mark.
   मोजपात्र 200 मिली. खुणेपर्यंत पाण्याने भरा.

ii. Put an irregular stone in the water. (The stone should be completely immersed inside the water with the water level at least 1-3 cm above the upper surface of the stone.)
   या पाण्यात एक अनियमित आकाराचा दगड सोडा (जेणेकरून दगड पाण्यात पूर्णपणे बुडालेला असेल आणि पाणी दगडापेक्षा किमान 1-3 सेंमी.वर असेल, याची खात्री करा).

iii. Estimate the volume of the stone by observing the amount of water displaced. Unless the water level matches with one of the markings, this will only be an approximate measurement.
   दगडामुळे विस्थापित झालेल्या पाण्याची पातळी पाहून दगडाच्या आकारमानाचा अंदाज घ्या. जोपर्यंत मोजपात्रावरील पाण्याची पातळी कोणत्याही खुणेबरोबर जुळत नाही, तोपर्यंत हे वाचन अंदाजे असेल.

iv. Now, immerse enough marbles to bring the water level up to the next marking.
   Volume of water before adding the stone___________________________
   आता, मोजपात्रात एवढ्या गोट्या टाका की पाण्याची पातळी वरच्या खुणेशी जुळेल.
   दगड टाकण्यापूर्वी पाण्याची पातळी ________________________________
   Number of marbles required to raise the water level to the next mark ______________________

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

The irregular stone +______________marbles displaced______________volume of water.
पाण्याची पातळी वरच्या खुणेपर्यंत वाढण्यासाठी पाण्यात टाकलेल्या गोट्यांची संख्या ______________
अनियमित दगड + ________ गोट्या यांमुळे _________ मिली. पाणी विस्थापित झाले.

v. Use the mean volume of marbles, V_{exp} obtained in task 2 to determine the volume of the stone more precisely.
दगडाचे आकारमान अधिक अचूकपणे काढण्यासाठी कृती 2 मध्ये मिळालेले गोट्यांचे सरासरी आकारमान (V_{exp}) वापरा.

Volume of the irregular stone______________________________

अनियमित दगडाचे आकारमान ______________________________

Note that once the stone is submerged, there needs to be sufficient depth of water above the stone to immerse a few marbles completely. If this is not the case the teacher may consider restarting with a larger amount of water.
लक्ष देऊन पाहा की दगड पाण्यात पूर्णपणे बुडला आहे, आणि दगडाच्या वर पुरेसे पाणी आहे, म्हणजे आपण त्यात अजून काही गोट्या टाकू शकतो. अशी स्थिती नसेल, तर शिक्षक पाण्याचे प्रमाण वाढवून हीच कृती पुन्हा करायला सांगू शकतात.

Task 5: A challenge
कृती 5: एक आव्हान

In this task the students confront their belief that by putting enough number of marbles, the water level will always rise to the top of the container. They may be surprised that this is not the case. The main reason for this, which the students will discover through this task, is that there are gaps between the marbles, even when they are closely packed and the amount of water may be just sufficient to fill these gaps without rising above the level of the marbles.
विद्यार्थ्यांना असा ठाम विश्वास असतो की पुरेशा गोट्या मोजपात्रात टाकल्या, तर मोजपात्रातील पाणी काठाच्या दिशेने वर येईल, मात्र जेव्हा ते कृती करतात आणि त्यांच्या लक्षात येते की असे घडत नाही तेव्हा त्यांना खूप आश्चर्य वाटते. या कृतीमधून विद्यार्थ्यांना यामागील मुख्य कारण लक्षात येईल की जरी दोन गोट्या एकमेकांना चिकटून असल्या तरी गोट्यांच्या दरम्यान काही जागा मोकळी असते.जेव्हा आपण मोजपात्रात खूप गोट्या टाकतो तेव्हा मोजपात्रातील पाणी गोट्यांच्या दरम्यानच्या काही मोकळ्या जागांमध्ये भरले जाते, त्यामुळे पाणी गोट्यांच्या पातळीच्या वर चढत नाही.

1. Fill up the cylinder with water to the 50 mL mark.
   मोजपात्रात 50 मिली. पाणी भरा.
2. By adding enough marbles, try to raise the water level to the top of the cylinder.
   पुरेशा गोट्या पाण्यात टाका आणि पाण्याची पातळी मोजपात्राच्या वरच्या टोकापर्यंत वाढवण्याचा प्रयत्न करा.
3. If you do not succeed in raising the water level to the top, note the highest marking to which the water level rises.
   तुम्हाला पाण्याची पातळी सर्वांत वरच्या खुणेपर्यंत नेण्यात यश आले नाही, तरी पाण्याची पातळी सर्वांत जास्त कोणत्या खुणेपर्यंत पोहोचू शकते, हे तुम्ही सांगू शकाल का?
4. Maximum marking to which the water level rises
   पाण्याची पातळी सर्वांत जास्त ज्या खुणेपर्यंत वाढली ती खूण__________________________
5. Number of marbles required to increase the volume by this amount
   पाण्याची पातळी वाढण्यासाठी लागलेल्या गोट्यांची संख्या__________________________
6. Can you think of an explanation for this?
   याच्या स्पष्टीकरणाचा विचार करा.

____
____
____
____

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

7. Do you think the thirsty crow would have succeeded in quenching its thirst? Explain your answer.
   तहानलेल्या कावळ्याची तहान भागली असेल का? तुम्हाला काय वाटते, कारणे द्या.

____

____

____

____

____

- The initial volume of water is kept deliberately low so that adding more and more marbles does not bring the water level up to the top. Once this happens, the teacher may support the students in finding the explanation that when objects like marbles are packed as closely as possible, they still have some gaps in between. The water accumulates there and hence never rises above a certain level. Assuming the closest possible packing of the marbles, there is still about a quarter of volume between the marbles that is left over for air or water. Thus, in this task, if the initial volume of water was 50 mL, the water level after adding many marbles will not rise beyond 200 mL. The teacher may also point out to the more interested students that this concept is called the “packing fraction”. Similar concept also becomes important in the theory which explains how atoms are packed together in solids.
  पाण्याचे प्रमाण सुरुवातीला जाणूनबुजून कमी ठेवले जाते, जेणेकरून अधिकाधिक गोट्या टाकल्या तरी पाण्याची पातळी काठापर्यंत पोहोचत नाही. एकदा असे करून झाले की गोट्यांसारख्या वस्तू शक्य तेवढ्या एकमेकांना चिकटून भरल्या तरीही त्यांच्या दरम्यान काही जागा मोकळी असते, हे स्पष्ट करण्यासाठी शिक्षक विद्यार्थ्यांना मदत करू शकतात. याच मोकळ्या जागी पाणी शिरते आणि म्हणून एका ठरावीक पातळीच्या वर पाणी कधीही चढत नाही. भांड्यातील गोट्या शक्य तितक्या एकमकांना चिकटून आहेत असे आपण गृहीत धरले, तरीही त्यांच्या दरम्यान एकूण आकारमानाच्या एक चतुर्थांश आकारमानाएवढी हवा किंवा पाणी भरेल, एवढी जागा असते. या कृतीमध्ये, पाण्याचे प्रमाण सुरुवातीला 50 मिली. असेल, तर खूप गोट्या टाकल्या तरीही पाण्याची पातळी 200 मिली. पेक्षा जास्त वाढत नाही. उत्सुकता असलेल्या विद्यार्थ्यांना शिक्षक सांगू शकतात की, या संकल्पनेला 'बंधनांश' (packing fraction) म्हणतात. तसेच स्थायू पदार्थांमध्ये, अणूची रचना कशी असते, हे स्पष्ट होण्यासाठी यांसारख्या संकल्पना महत्त्वाच्या ठरतात.

  Thus, one of the takeaways of this unit is that the thirsty crow would not have succeeded in quenching its thirst if the water level in the pitcher had been too low to begin with.
  अशा प्रकारे, या अध्ययन घटकाचा एक महत्त्वाचा मुद्दा म्हणजे जर घागरीतील पाण्याची पातळी सुरुवातीला खूप कमी असेल तर तहानलेला कावळा त्याची तहान भागवण्यात यशस्वी होणार नाही.
- Only for the teachers: In case of (spherical) marbles, the closest possible packing is called “hexagonal close packed”. The packing fraction for this is $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \sim 0.74$. This means that in the most ideal closest packing, 74% of the volume will be occupied by marbles and at most 26% by water. Further, on the edges of the cylinder, this fraction will be poorer. Hence, we expect water in the above task to rise to between 120-150 mL.
  फक्त शिक्षकांसाठी: (गोलाकार) गोट्यांच्या बाबतीत, शक्य तितक्या घट्ट बांधणीला ‘षटकोनी बंदिस्त बांधणी’ (Hexagonal closed packing) असे म्हणता येईल. यासाठी बंधनांश $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \sim 0.74$ आहे. याचा अर्थ असा की सर्वांत आदर्श बांधणीमध्ये, 74% आकारमान गोट्यांचे आणि कमाल 26% आकारमान पाण्याने व्यापलेले असेल. पुढे, मोजपात्राच्या काठावर, या बंधनांशाचे मूल्य अजून कमी होईल. म्हणून, वरील कृतीमध्ये पाण्याची पातळी 120-150

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE. January, 2024

मिली.पर्यंत वाढण्याची अपेक्षा आहे.

Task 6: Estimating the packing fraction (Optional)
कृती 6: बंधनांशाचा अंदाज बांधणे (पर्यायी)

i. Fill the marked cylinder with marbles up to the 50 mL mark. Count the marbles as you are putting them in one by one. Give the cylinder a good shake to ensure that the marbles are packed as closely as possible and make sure that the marbles are as close as possible to the level with the 50 mL mark by adding or removing some marbles.
तुम्ही बनवलेले चिन्हांकित चंचुपात्र गोट्यांनी 50 मिली. पर्यंत भरा. चंचुपात्रात गोट्या टाकत असताना एकापाठोपाठ एक गोट्या मोजा. चंचूपात्रात गोट्या भरल्यानंतर चंचुपात्र चांगले हालवा, जेणेकरून गोट्या एकमेकांना चिकटून घट्टपणे बसतील आणि याची खात्री करा की 50 मिली. खुणेपर्यंतच्या गोट्या शक्य तितक्या एकमेकांना चिकटून राहण्यासाठी काही गोट्या चंचूपात्रातून बाहेर काढा किंवा काही गोट्या चंचुपात्रात टाका.

ii. The packing fraction is the ratio of the volume of the marbles filling up the space to the total volume of the space. Can you find the packing fraction using this definition?
बंधनांश म्हणजे गोट्यांनी व्यापलेल्या जागेचे आकारमान आणि जागेचे एकूण आकारमान यांचे गुणोत्तर. ही व्याख्या वापरून तुम्ही बंधनांश काढू शकाल का?

iii. Repeat this for the 100 mL and the 150 mL mark and find the packing fractions for these trials as well. What do you notice?
पुन्हा ही कृती 100 मिली. आणि 150 मिली. पाण्याची पातळी घेऊन करा आणि या कृतींसाठीही बंधनांश काढा. तुम्हाला काय दिसून आले?

- It should not be difficult for the students to find the average volume of one marble by calculation since they know the average radius of a marble. Multiplying by the number of marbles gives the total volume of the marbles. They already know the total space inside the container from the marked volume (50 mL, 100 mL, or 150 mL as the case may be). So they can find the ratio, which is the packing fraction.
विद्यार्थ्यांना एका गोटीची सरासरी त्रिज्या माहीत असल्याने त्यावरून एका गोटीचे सरासरी आकारमान शोधणे, अवघड जाऊ नये. त्याला गोट्यांच्या संख्येने गुणल्यास आपल्याला गोट्यांचे एकूण आकारमान काढता येईल. चंचुपात्रावर केलेल्या आकारमानांच्या खुणांवरून (50 मिली.,100 मिली.,150 मिली.) चंचुपात्रात किती जागा (आकारमान) आहे, हेही विद्यार्थ्यांना माहीत आहे. त्यावरून विद्यार्थी गुणोत्तर काढू शकतात. यालाच बंधनांश म्हणतात.
- This is slightly more challenging: Another method is to plot a graph with the total volume of the marbles on the Y-axis and the total volume of the space occupied by them on the X-axis. By drawing a “best fit” straight line through the points, the slope of the line gives the packing fraction.
हे थोडे अधिक आव्हानात्मक आहे: दुसरी पद्धत म्हणजे Y-अक्षावर गोट्यांचे एकूण आकारमान आणि X-अक्षावर त्यांनी व्यापलेल्या जागेचे एकूण आकारमान घेऊन एक आलेख तयार करा. बिंदूंमधून “सर्वोत्तम योग्य” सरळ रेषा काढल्यास, रेषेचा उतार बंधनांश दर्शवतो.
- An interesting extension of this activity is to compare the packing fractions obtained by using ball bearings and marbles together, and by varying the diameter of the container.
या कृतीचा विस्तार करायचा झाल्यास बॉल बेअरिंग आणि गोट्या यांचा एकत्रितपणे वापर करून आणि वेगवेगळ्या व्यासाची भांडी घेऊन मिळालेल्या बंधनांशांची तुलना करता येईल.
- It may be worth expanding the analogy to explain that groundwater is also filled in the pore spaces of soil particles and stones beneath the ground. Thus even though pore spaces in the soil seem tiny, they hold huge amounts of groundwater that we extract via hand pumps and

borewells.
जमिनीखाली, मातीचे कण आणि दगड यांच्या पोकळ्यांमध्ये पाणी साठलेले असते, हे सांगण्यासाठी वरील साधर्म्याचा विस्तार केला तर फायदेशीर ठरू शकते. अशा प्रकारे, मातीतील पोकळ्या जरी लहान वाटत असल्या, तरी त्यांच्यात मोठ्या प्रमाणात भूजल धरून ठेवलेले असते. आणि तेच पाणी आपण हातपंपाने आणि बोअरवेलने जमिनीवर आणतो.

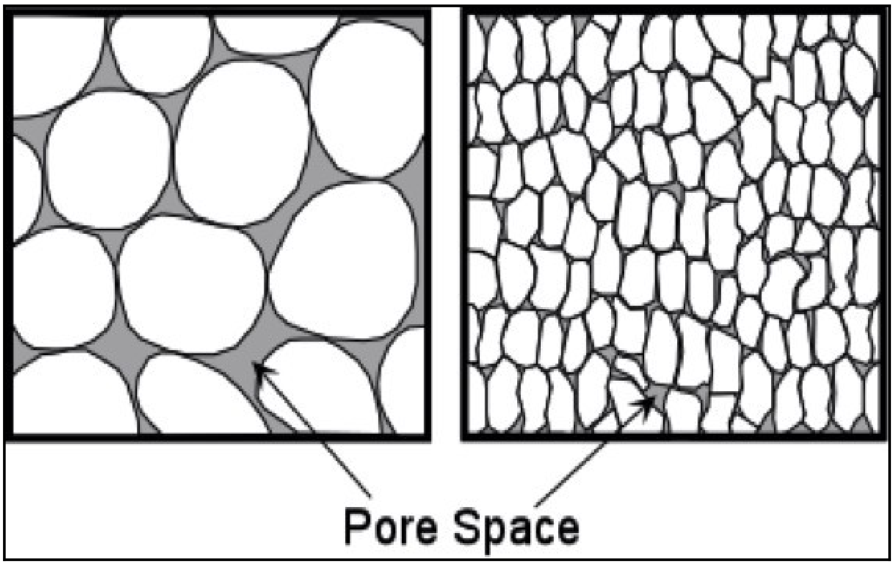

Figure T2: Pore space between soil particles
आकृती *T2: मातीतील कणांच्या पोकळ्यांमधील जागा*

- *Figure T3* below shows "hexagonal close packing" that you may have observed in the stacking of balls or of fruits in the market.
  पुढे दिलेल्या *आकृती T3* मध्ये 'षटकोनी बंदिस्त बंधन' दाखवले आहे. बाजारात फळे किंवा चेंडू अशा प्रकारे मांडलेले तुम्ही पाहिले असतील.

Figure T3: *Fruits stacked in a fruit stal*
आकृती *T3: फळांच्या दुकानामध्ये रचलेली फळे*

Idea for further extension
पुढील विस्तारासाठी कल्पना

What happens if we use a bottle with a larger or smaller diameter, or if we use marbles that are larger or smaller? Does the packing fraction change?
जर आपण मोठ्या किंवा लहान व्यासाची बाटली वापरली किंवा लहान किंवा मोठ्या आकाराच्या गोट्या वापरल्या तर काय होईल? बंधनांशात काही बदल होईल का?

Suggested readings
अधिक वाचनासाठी

- An advanced discussion on pores in soils and their relationship to various processes and phenomena taking place in soil can be found at:
  Nimmo, J.R., 2004, Porosity and Pore Size Distribution, in Hillel, D., ed. Encyclopedia of Soils in the Environment: London, Elsevier, v. 3, p. 295-303. Retrived from: https://wwwrcamnl.wr.usgs.gov/uzf/abs_pubs/papers/nimmo.04.encyc.por.ese.pdf
- The overflow principle, the principle that when a body is immersed in a liquid, it displaces an equal volume of the liquid, is often confused with the related but different Archimedes principle. The latter states the equivalance of the force of bouyancy and the weight of the displaced liquid. For an explanation see this link: https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html

Image sources
छायाचित्राचा स्त्रोत

- Image 1: *The Crow and the Pitcher: From The Aesop for Children, by Aesop, illustrated by Milo Winter, Project Gutenberg etext 1994*

Credits
Main Authors: Ananda Dasgupta, Keyuri Raodeo
Contributing Author: Aniket Sule
Reviewers: Arnab Bhattacharya, Vandana Nanal
Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam
Marathi Translator: Abhijeet Malandkar
Marathi Editorial Team: Deepa Chari, Aaloka Kanhere, Vijay D. Lale
Creative Commons Licene: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE