

LU 8.14. ਕੀ ਤੁਹਾਡੀਆਂ ਬਹੁਭੁਜਾਵਾਂ (Polygons) ਸਮਰੂਪ ਹਨ?

LU 8.14. Is Your Polygon the Same as Mine?

Overview

ਸਾਰ

In this Learning Unit, students will explore the minimum conditions needed to construct a unique triangle or a quadrilateral, and other polygons. The objective of this Learning Unit is for the students to realize for themselves that the conditions which enable drawing a unique polygon are the same as the conditions of congruency they have studied.

ਇਸ ਸਿਖਲਾਈ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ, ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵਿਲੱਖਣ ਤਿਕੋਣ (Triangle), ਚਤੁਰਭੁਜ (Quadrilateral) ਅਤੇ ਹੋਰ ਬਹੁਭੁਜ (Polygon) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਿਮਨਤਮ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਪੜਚੋਲ ਕਰਨਗੇ। ਇਸ ਸਿਖਲਾਈ ਇਕਾਈ ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਇਹ ਅਹਿਸਾਸ ਕਰਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਜਿਹੜੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਬਹੁਭੁਜ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਣ ਦੇ ਯੋਗ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਉਹ ਸਮਰੂਪਤਾ (Congruence) ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।

Minimum time

ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸਮਾਂ

Triangle activity (Tasks 1 to 5)– Two sessions of 40 minutes each

Quadrilateral activity (Task 6)– Two sessions of 40 minutes each

Extension to other polygons (Tasks 7 to 9)– One session of 40 minutes

ਤਿਕੋਣ (Triangle) ਕਿਰਿਆ (ਕਾਰਜ 1 to 5)– 40 ਮਿੰਟਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸੈਸ਼ਨ

ਚਤੁਰਭੁਜ (Quadrilateral) ਕਿਰਿਆ (ਕਾਰਜ 6)– 40 ਮਿੰਟਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸੈਸ਼ਨ

ਹੋਰ ਬਹੁਭੁਜਾਵਾਂ (Polygons) ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਾਰ (ਕਾਰਜ 7 to 9)– 40 ਮਿੰਟਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸੈਸ਼ਨ

Type of Learning Unit: Classroom

ਸਿਖਲਾਈ ਇਕਾਈ : ਕਲਾਸਰੂਮ-ਅਧਾਰਤ

Introduction

ਜਾਣ-ਪਛਾਣ

Have you ever wondered how you would describe a triangle that is in your mind to somebody over the phone? What do you really say? Do you mention the sides or the angles? And would that person get the exact same figure that you had in mind? Moreover, how can you do this by giving minimum information? Today we will try to answer these questions by investigating some examples, making observations, and verifying or refuting these observations.

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਦੇ ਸੋਚਿਆ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਫੋਨ ਤੇ ਤਿਕੋਣ (Triangle) ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਿਵੇਂ ਕਰੋਗੇ, ਜੋ ਤੁਹਾਡੇ ਦਿਮਾਗ ਵਿੱਚ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹੋਗੇ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਪਾਸਿਆਂ) ਜਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਕਰੋਗੇ? ਅਤੇ ਕੀ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਉਹੀ ਆਕਾਰ ਮਿਲੇਗਾ ਜਿਹੜਾ ਤੁਹਾਡੇ ਮਨ ਵਿੱਚ ਸੀ? ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਕੇ ਕਿਵੇਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਅੱਜ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ, ਨਿਰੀਖਣ, ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਦੀ ਤਸਦੀਕ ਕਰਕੇ ਜਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਜਵਾਬ ਦੇਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ।

Unit-specific objectives

ਇਕਾਈ ਸੰਬੰਧੀ ਉਦੇਸ਼

- To establish a connection between congruence and the construction of unique triangles
- To find the number of conditions necessary to ensure congruence of triangles, quadrilaterals, and other polygons
- To understand why certain sets of conditions are not criteria for congruence
- ਵਿਲੱਖਣ ਤਿਕੋਣਾਂ (Triangles) ਦੀ ਉਸਾਰੀ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਪਰਕ ਸਥਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ
- ਤਿਕੋਣ, ਚਤੁਰਭੁਜ (Quadrilateral) ਅਤੇ ਹੋਰ ਬਹੁਭੁਜਾਵਾਂ (Polygons) ਦੀਆਂ ਇਕਰੂਪਤਾ ਨੂੰ ਯਕੀਨੀ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ
- ਇਹ ਸਮਝਣ ਲਈ ਕਿ ਕੁਝ ਸ਼ਰਤਾਂ ਇਕਰੂਪਤਾ ਲਈ ਮਾਪਦੰਡ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਹਨ

Links to curriculum

ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਦੇ ਲਿੰਕ

- Congruence of Triangle (NCERT Mathematics Textbook Class 7) ,
- Practical Geometry (NCERT Mathematics Textbook Class 8),

Prerequisites

ਅਗਾਊਂ ਜਾਣਕਾਰੀ

Students should be familiar with:

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਾਣੂ ਹੋਣ:

- Use of geometric tools like scale and compass
- Basic construction of triangles and quadrilaterals
- ਰੇਖਾ-ਗਣਿਤਕ (ਜਿਓਮੈਟ੍ਰਿਕ) ਸਾਧਨਾਂ ਜਿਵੇਂ ਪੈਮਾਨਾ (ਸਕੇਲ) ਅਤੇ ਪਰਕਾਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ
- ਤਿਕੋਣ ਅਤੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ

Materials

ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮਾਨ

Blank sheets, pencils, erasers, compass-boxes (compass, set-squares, protractor, and scale), scissors.

ਖਾਲੀ ਪੇਨ, ਪੈਨਸਿਲ, ਰੱਬੜ, ਪਰਕਾਰ-ਬਕਸਾ (ਪਰਕਾਰ, ਸੈਟ-ਵਰਗ, ਪ੍ਰੋਟੈਕਟਰ ਅਤੇ ਪੈਮਾਨਾ), ਕੈਂਚੀ।

Task 1: Drawing your triangle

ਕਾਰਜ 1: ਆਪਣਾ ਤਿਕੋਣ (Triangle) ਬਣਾਉਣਾ

Q1. Draw a triangle of your choice on the given blank sheet of paper. Measure the sides and the angles of the triangle, and label the vertices of the triangle.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਕਾਰਜ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਖਾਲੀ ਸ਼ੀਟ ਤੇ ਆਪਣੀ ਪਸੰਦ ਦਾ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉ। ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪੋ ਅਤੇ ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਕੋਣਬਿੰਦੂ (Vertex) ਨੂੰ ਲੇਬਲ ਕਰੋ।

Before the students begin working on this activity, make sure they are sitting in pairs.

Each task requires discussing with another student, and in this unit, we often refer to these students in pairs as partners. Make sure they all have required materials or at least that every pair has one set of scale and compass.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਗਤੀਵਿਧੀ 'ਤੇ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਅਰੰਭ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਕਿ ਉਹ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬੈਠੇ ਹਨ।

ਹਰੇਕ ਕਾਰਜ ਲਈ ਦੂਸਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨਾਲ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰੇ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਕਸਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜੀਦਾਰ ਵਜੋਂ ਸੰਬੋਧਿਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਕੋਲ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮਾਨ ਹੈ ਜਾਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਪਰਕਾਰ-ਬਕਸਾ ਹੋਵੇ।

This activity will give you a chance to see whether students can draw triangles, measure sides and angles, and also, whether they know how to label a triangle. See Figure T1 for an example of a student writing the angle of a triangle adjacent to a side instead of a vertex when we conducted this activity with Class 8 students.

ਇਹ ਗਤੀਵਿਧੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਨ ਦਾ ਮੌਕਾ ਦੇਵੇਗੀ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾ ਕੇ ਉਸਦੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਕੀ ਉਹ ਜਾਣਦੇ ਹਨ ਕਿ ਤਿਕੋਣ ਨੂੰ ਲੇਬਲ ਕਿਵੇਂ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਲਾਸ 8 ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨਾਲ ਵੀ ਇਹ ਗਤੀਵਿਧੀ ਕੀਤੀ, ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਚਿੱਤਰ T 1 ਵੇਖੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਗਲਤ ਲੇਬਲ ਕੀਤਾ।

Q2. Now see the triangles drawn by your friends. Do you see anything interesting? What is it?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਆਪਣੇ ਦੋਸਤਾਂ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਤਿਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਕੁੱਝ ਦਿਲਚਸਪ ਨਜ਼ਰ ਆਇਆ? ਉਹ ਕੀ ਹੈ?

Keep the paper on which you drew your triangle safely aside; we will be coming back to this triangle later in the activity.

ਜਿਸ ਕਾਗਜ਼ ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਈ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਸੰਭਾਲ ਕੇ ਰੱਖੋ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਗਤੀਵਿਧੀ ਦੌਰਾਨ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਇਸ ਵੱਲ ਆਵਾਂਗੇ।

Task 2a: Constructing a triangle when only one side is given

ਕਾਰਜ 2 ਓ: ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣਾ- ਜਦੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ

Draw a triangle on the given paper, one of whose side is 6 cm. Label the vertices of your triangle.

ਦਿੱਤੇ ਕਾਗਜ਼ ਤੇ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਓ, ਜਿਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6 ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਹੋਵੇ। ਕੋਣਬਿੰਦੂਆਂ (Vertices) ਨੂੰ ਲੇਬਲ ਕਰੋ।

Students might ask a question, whether all the sides of the triangle are 6 cm, and a productive answer to this question is to say "No". For the purpose of our activity, it is best not to get equilateral triangles. You can respond to them as, "One of the sides of the triangle is 6 cm, and not all". Despite this, a student might draw an equilateral triangle, and we discuss later, how to handle such a situation.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੁੱਛ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਕਿ ਕੀ ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਾਸੇ 6 ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਹਨ? ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੰਗਾ ਉੱਤਰ ਹੈ, "ਨਹੀਂ"। ਸਾਡੀ ਗਤੀਵਿਧੀ ਦੇ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ, ਸਮਝੂਜੀ ਤਿਕੋਣਾਂ (equilateral triangles) ਨਾ ਲੈਣਾ ਬਿਹਤਰ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਵਾਬ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ, "ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਇੱਕ ਪਾਸਾ 6 ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਹੈ, ਸਾਰੇ ਨਹੀਂ"। ਇਸ ਦੇ ਬਾਵਜੂਦ, ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕ ਸਮਝੂਜੀ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਸੰਭਾਲਿਆ ਜਾਵੇ।

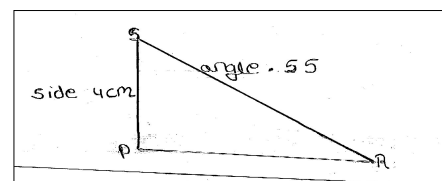


Figure T1: Students' way of labelling a triangle

ਚਿੱਤਰ T 1. ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਲੇਬਲ ਕੀਤਾ ਤਿਕੋਣ

Now study the triangle drawn by your partner.

ਹੁਣ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਤਿਕੋਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ

Q1. Is your triangle the same as your partner's?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਕੀ ਤੁਹਾਡੇ ਦੋਵਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ?

Q2. How did you compare these two triangles?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਤੁਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ?

Q3. You and your partner, both were told that one side of the triangle is 6 cm. Did you both get exactly the same triangles? Why?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3. ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਸੀ, ਜਿਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6 ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਹੈ। ਕੀ ਦੋਵਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ? ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ?

Make sure that you collect some oral responses here. The students can give various criteria that they used to compare the triangles; like lengths of sides or measure of the angles. When you move around, check if there are pairs of students whose triangles are obviously different. Ask these students whether for such cases they need to measure the sides or angles or they can decide using some other ways.

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਜੁਝਾਨੀ ਜਵਾਬ ਲਵੋ। ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਪਦੰਡ ਵਰਤ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਕਰਨਾ। ਕਲਾਸ ਚ ਘੁੰਮਦੇ ਸਮੇਂ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਜਿਹੇ ਜੋੜੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਪੁੱਛੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਕੋਣ ਦੇ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਈ ਜਾਂ ਉਹ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵੀ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਨ।

In some cases, the two triangles being compared may look obviously different. In some other cases, one may need to check by measuring the sides and/or the angles. Another way to compare is to superimpose the two triangles, by cutting them out, or by holding the sheets of paper against a bright light. Teachers may use the opportunity to point out that when the triangles are the same (i.e., have corresponding sides and angles of the same measure or overlap exactly), then we say that the triangles are congruent.

ਕੁਝ ਮਾਮਲਿਆਂ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਖਰੇ ਲੱਗ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਜਦਕਿ ਕੁਝ ਮਾਮਲਿਆਂ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਕੋਣ ਦੇ ਮਾਪ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਪੈ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤਰੀਕਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਰੱਖ ਕੇ ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਕਾਗਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਰੌਸ਼ਨੀ ਦੇ ਤੇਜ਼ ਸਰੋਤ ਅੱਗੇ ਰੱਖ ਕੇ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਅਧਿਆਪਕ ਇਸ ਮੌਕੇ ਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਜਦੋਂ ਤਿਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹੋਣ (ਮਤਲਬ, ਜਦੋਂ ਨਾਲ ਲੱਗਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ), ਉਹਨਾਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ (Congruent) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

Task 2b: Constructing a triangle when only one angle is given

ਕਾਰਜ 2 ਅ: ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣਾ ਜਦੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ

Draw a triangle on the given paper where one of the angles measures 55° . Name your triangle.

ਦਿੱਤੇ ਕਾਗਜ਼ ਤੇ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉ ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ 55° ਹੋਵੇ। ਤਿਕੋਣ ਨੂੰ ਨਾਮ ਦਿਓ।

Students might want to know the measures of the other angles. Reiterate that only one angle has been specified. Use this opportunity to revise the properties of triangles, and how, given two angles, one can always find the third angle.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸ਼ਾਇਦ ਦੂਜੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਵੀ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋਣ। ਦੁਹਰਾਓ ਕਿ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਕੋਣ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਮੌਕੇ ਦਾ ਫਾਇਦਾ ਉਠਾਓ ਅਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੱਸੋ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੇ ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਤੀਸਰੇ ਕੋਣ ਦਾ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

Now study the triangle drawn by your partner.

ਹੁਣ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਤਿਕੋਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

Q1. Is your triangle the same as your partner's?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਕੀ ਤੁਹਾਡੇ ਦੋਵਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ?

Q2. How did you compare these two triangles?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਤੁਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ?

Q3. You and your partner, both were given one angle of 55° . Did you both get exactly the same triangles? Why?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3. ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਸੀ, ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ 55° ਹੋਵੇ। ਕੀ ਦੋਵਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ? ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ?

Task 3: Constructing a triangle when two measures are given

ਕਾਰਜ 3: ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣਾ ਜਦੋਂ ਦੋ ਮਾਪ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ

Give Group A the measure of two sides, Group B the measure of one side and one angle, and Group C the measure of two angles.

ਮੰਡਲੀ ਕ ਨੂੰ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਦਿਓ, ਮੰਡਲੀ ਖ ਨੂੰ ਇੱਕ ਭੁਜ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ ਦਵੇ ਅਤੇ ਮੰਡਲੀ ਗ ਨੂੰ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਦਵੇ। Make three groups among yourselves. If possible, form your group with your classmates who are sitting close to you. Let us call these groups A, B and C.

ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮੰਡਲੀਆਂ ਬਣਾਉ। ਹੋ ਸਕੇ ਤਾਂ ਨੇੜੇ ਬੈਠੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀਆਂ ਮੰਡਲੀਆਂ ਬਣਾਉ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ, ਖ, ਗ ਨਾਮ ਦੇ ਦਿਓ।

Group A: Draw a triangle whose sides are 7 cm and 5 cm. Label the vertices of your triangle.

Group B: Draw a triangle whose one side is 6 cm and one angle is 55° . Label the vertices of your triangle

Group C: Draw a triangle whose two angles are 50° and 75° . Label the vertices of your triangle

ਮੰਡਲੀ ਕ: ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉ ਜਿਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 7 ਸੈਂ.ਮੀ. ਅਤੇ 5 ਸੈਂ.ਮੀ. ਹੋਣ। ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਕੋਣਬਿੰਦੂਆਂ (Vertices) ਨੂੰ ਲੇਬਲ ਕਰੋ।

ਮੰਡਲੀ ਖ: ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉ ਜਿਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ 6 ਸੈਂ.ਮੀ. ਅਤੇ ਕੋਣ 55° ਹੋਵੇ। ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਕੋਣਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਲੇਬਲ ਕਰੋ।

ਮੰਡਲੀ ਗ: ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉ ਜਿਸਦੇ ਦੋ ਕੋਣ 50° ਅਤੇ 75° ਹੋਣ। ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਕੋਣਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਲੇਬਲ ਕਰੋ।

Now study the triangle drawn by your partner.

ਹੁਣ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਤਿਕੋਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

Q1. Is your triangle the same as your partner's?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਕੀ ਤੁਹਾਡੇ ਦੋਵਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ?

Q2. How did you compare these two triangles?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਤੁਸੀਂ ਦੋਨੋਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ?

Groups A, B and C:

ਮੰਡਲੀ ਕ, ਖ ਅਤੇ ਗ

Q3. Did each of you get exactly the same triangles as the members in your group ? Why

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3. ਕੀ ਤੁਹਾਡੀ ਮੰਡਲੀ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹਨ? ਕਿਉਂ?

Students most probably will verify whether the two triangles are the same or not by measuring the sides and angles of their triangles, as mentioned earlier. The teacher can also suggest superimposing (cutting the two triangles and placing on each other to see whether they overlap each other exactly), to see whether the triangles obtained are congruent to each other.

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਕੋਣ ਦੇ ਮਾਪ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਤਿਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹਨ ਕਿ ਨਹੀਂ। ਅਧਿਆਪਕ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਰੱਖ ਕੇ ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਕਾਗਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਰੌਸ਼ਨੀ ਦੇ ਤੇਜ਼ ਸਰੋਤ ਅੱਗੇ ਰੱਖ ਕੇ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ (Congruence) ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

Task 4: Constructing a triangle when three measures are given

ਕਾਰਜ 4: ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣਾ ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਮਾਪ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ

The class is already divided into 3 groups. Now divide each group into 2 sub-groups. A1 & A2, B1 & B2 and C1 & C2. Make sure that any two students sitting beside each other are part of the same group.

ਅਸੀਂ ਕਲਾਸ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਮੰਡਲੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਹਰੇਕ ਮੰਡਲੀ ਨੂੰ ਦੋ ਸਹਿ-ਮੰਡਲੀਆਂ ਕ 1 & ਕ 2, ਖ 1 & ਖ 2 ਅਤੇ ਗ 1 & ਗ 2। ਇਹ ਚੰਗਾ ਰਹੇਗਾ ਜੇਕਰ ਨਾਲ ਬੈਠੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕੋ ਸਹਿ-ਮੰਡਲੀ ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

Group A1: Draw a triangle XYZ such that $XY = 4$ cm, $YZ = 6$ cm, and $XZ = 7$ cm.

Group A2: Draw a triangle ABC such that, $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, and $\angle ACB = 45^\circ$.

Group B1: Draw a triangle IJK such that $\angle IJK = 40^\circ$, $\angle JKI = 65^\circ$, and $\angle IKJ = 75^\circ$.

Group B2: Draw a triangle STU such that $\angle UST = 50^\circ$, $ST = 3$ cm, and $\angle STU = 65^\circ$.

Group C1: Draw a triangle EFG such that $EF = 7$ cm, $FG = 9$ cm, and $\angle GEF = 90^\circ$.

Group C2: Draw a triangle PQR such that $PQ = 5$ cm, $\angle PQR = 50^\circ$, and $QR = 4$ cm.

ਮੰਡਲੀ ਕ 1: ਤਿਕੋਣ ਕਖਗ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦਾ, ਕਖ = 4 ਸੈਂ.ਮੀ., ਖਗ = 6 ਸੈਂ.ਮੀ., ਅਤੇ ਕਗ = 7 ਸੈਂ.ਮੀ..

ਮੰਡਲੀ ਕ 2: ਤਿਕੋਣ ਚਫਜ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦਾ, ਚਫ = 5 ਸੈਂ.ਮੀ., ਫਜ = 6 ਸੈਂ.ਮੀ., ਅਤੇ \angle ਚਜਫ = 45° .

ਮੰਡਲੀ ਖ 1: ਤਿਕੋਣ ਤਥਦ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦਾ, \angle ਤਥਦ = 40° , \angle ਥਦਤ = 65° , ਅਤੇ \angle ਦਤਥ = 75° .

ਮੰਡਲੀ ਖ 2: ਤਿਕੋਣ ਸਟਯ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦਾ, \angle ਯਸਟ = 50° , ਸਟ = 3 ਸੈਂ.ਮੀ., ਅਤੇ \angle ਸਟਯ = 65° .

ਮੰਡਲੀ ਗ 1: ਤਿਕੋਣ ਪਫਬ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦਾ, ਪਫ = 7 ਸੈਂ.ਮੀ., ਫਬ = 9 ਸੈਂ.ਮੀ., ਅਤੇ \angle ਬਪਫ = 90° .

ਮੰਡਲੀ ਗ 2: ਤਿਕੋਣ ਰਤਹ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦਾ, ਰਤ = 5 ਸੈਂ.ਮੀ., \angle ਰਤਹ = 50° , ਅਤੇ ਤਹ = 4 ਸੈਂ.ਮੀ..

Ask the groups to construct triangles as given in the instructions. Before they start, ask them to predict in which sub-groups would the triangles drawn be identical to one another, and in which sub-groups would the triangles be different from one another. Remember, students in group A2 should get different triangles (because this corresponds to the SSA condition, which is not a condition for congruence) and so should students in group B1 (which has the AAA condition). You might have to have a common discussion if everybody's triangles in these groups are the same to encourage the students to discover that the triangles need not be congruent even if they fulfil the conditions. The A2 group's condition (SSA) is especially

interesting because there are only two possible triangles that fulfil this condition (see figure T2.) The students in groups A2 and B1 will discover that the conditions given to them were non-congruence conditions. Following this, you may point out the similarity between the conditions in A2 and C1 (both are SSA). Ask the students if the condition given in C1 is a congruence condition. Ask them to explain why.

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਦਾਇਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਹੋ। ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਹੋ ਅਨੁਮਾਨ ਲਾਉਣ ਕਿ ਕਿਸ ਮੰਡਲੀ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਕਿਸ ਮੰਡਲੀ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਅਲੱਗ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਯਾਦ ਰੱਖੋ, ਕ 2 ਮੰਡਲੀ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਤਿਕੋਣਾਂ ਮਿਲਣਗੀਆਂ (ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਭਭਕ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ, ਜੋ ਸਮਰੂਪਤਾ (Congruence) ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ) ਇਦਾਂ ਹੀ ਖ 1 ਮੰਡਲੀ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਵੀ (ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਕਕ ਸ਼ਰਤਾਂ ਮਿਲੀਆਂ ਹਨ)। ਜੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਮੰਡਲੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਤਿਕੋਣ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਵਿਚਾਰ-ਵਟਾਂਦਰੇ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਤਸ਼ਾਹਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਭਾਵੇਂ ਉਹ ਸ਼ਰਤਾਂ ਪੂਰੀਆਂ ਕਰਨ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦਾ ਸਮਰੂਪ (Congruent) ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕ 2 ਮੰਡਲੀ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ (ਭਭਕ) ਖਾਸਕਰ ਦਿਲਚਸਪ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀਆਂ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਹੀ ਤਿਕੋਣਾਂ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ ਟ 2 ਦੇਖੋ)। ਕ 2 ਅਤੇ ਖ 1 ਮੰਡਲੀਆਂ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹ ਜਾਣਨਗੇ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਤੁਸੀਂ ਕ 2 ਅਤੇ ਗ 1 ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨਤਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹੋ (ਦੋਵੇਂ ਭਭਕ ਹਨ)। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਪੁੱਛੋ ਕਿ ਕੀ ਗ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸ਼ਰਤ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ। ਅਗਰ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ।

Now study the triangle drawn by your partner.

ਹੁਣ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਤਿਕੋਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

Q1. Is your triangle the same as your partner's?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਕੀ ਤੁਹਾਡੇ ਦੋਵਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ?

Q2. How did you compare these two triangles?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਤੁਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ?

Task 5: Minimum conditions for the construction of a unique triangle

ਕਾਰਜ 5: ਨਿਵੇਕਲਾ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਨਿਮਨਤਮ ਸ਼ਰਤਾਂ

Q1. If you want your friend/partner to construct exactly the same triangle like the one you drew in Task 1, what minimum information will you have to provide, such that she/he will also construct the exact same triangle?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤੁਹਾਡਾ ਦੋਸਤ/ਸਾਥੀ ਬਿਲਕੁਲ ਉਸੇ ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰੇ ਜਿਵੇਂ ਦਾ ਤੁਸੀਂ ਕਾਰਜ 1 ਵਿੱਚ ਬਣਾਇਆ ਸੀ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਨਿਮਨਤਮ ਕੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ ਕਿ ਉਹ ਵੀ ਉਸ ਜਿਹੀ ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰੇ?

Q2. In the previous question, is there a different set of information that could be provided to construct the exact same triangle? Try and mention all such different sets of information that would work.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਪਿਛਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ, ਬਿਲਕੁਲ ਉਸੇ ਤਿਕੋਣ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਾ ਵੱਖਰਾ ਸਮੂਹ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਜਿਕਰ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।

Allow students to make all kinds of possible conjectures. One common conjecture the students come up with is: give all three angles and all three sides. In response to this, you can remind them to come up with a **minimum** set of information. The six things they just mentioned is a lot of information. Again, giving three sides and two angles is the same as giving three sides and three angles (triangle's angle sum is 180°). So ensure that the information given is minimum as well as independent.

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਹਰ ਕਿਸਮ ਦੇ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਦਿਓ। ਇੱਕ ਆਮ ਅਨੁਮਾਨ ਜੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲੈ ਕੇ ਆਉਂਦੇ ਹਨ, ਕਿ ਜੇ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਦਈਏ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਵਾ ਦਿਓ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ **ਨਿਮਨਤਮ** ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣੀ ਹੈ। ਇਹ ਛੇ ਸ਼ਰਤਾਂ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਈ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕੁਝ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਅਤੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਦੇਣਾ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ ਤਿੰਨ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੈ)। ਇਸ ਲਈ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਅਤੇ ਸੁਤੰਤਰ ਹੈ।

Give them sufficient time. Insist that they write down their conjectures, in any language they prefer, using diagrams, using text, or any other way that helps them to convey their thinking. After 10 to 12 minutes, collect their conjectures for further discussion.

ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਾਫ਼ੀ ਸਮਾਂ ਦਿਓ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਹ ਆਪਣੇ ਅਨੁਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮਝਾਉਣ ਲਈ ਚਿੱਤਰਕਾਰੀ ਜਾਂ ਹੋਰ ਢੰਗ ਵੀ ਵਰਤ ਸਕਦੇ ਹਨ। 10-12 ਮਿੰਟਾਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਮਾਨ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰੇ ਲਈ ਇਕੱਠੇ ਕਰ ਲਓ।

Go through the students' conjectures, and look for possible patterns. Based on our experience, students came up with the following sets of information as leading to a unique triangle. Each may be thought of as a conjecture:

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅਨੁਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹੋ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਤ ਸੰਕੇਤਾਂ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦਿਓ। ਸਾਡੇ ਤਜ਼ਰਬੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਨਿਵੇਕਲਾ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹਨਾਂ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਸਮੂਹ ਲੈ ਕੇ ਆਉਣਗੇ।

- Two sides and two angles
- All three sides (SSS)
- One side and two angles (ASA, AAS)
- Two sides and one angle (SSA, SAS)
- All three angles (AAA)
- ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਕੋਣ
- ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਭਭਭ SSS)
- ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਅਤੇ ਦੋ ਕੋਣ (ਕਭਕ/ASA, ਕਕਭ/AAS)
- ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ (ਭਭਕ/SSA, ਭਕਭ/SAS)
- ਤਿੰਨ ਕੋਣ (ਕਕਕ AAA)

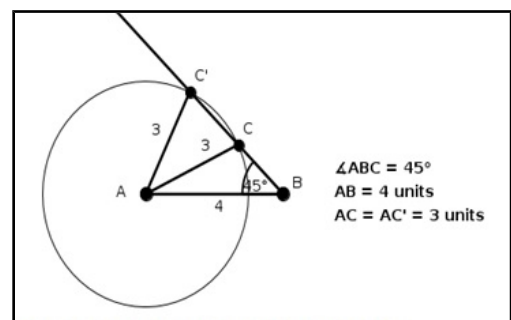


Figure T2 :Showing that SSA specification does not lead to a unique triangle

ਚਿੱਤਰ T2. ਭਭਕ(SSA) ਸ਼ਰਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਤਿਕੋਣ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦੀਆਂ

Conduct a discussion about which of these will not work. Students will soon figure out that the number of minimum conditions required is three; discuss to find out which three. For some conjectures such as SSA, you might have to be ready with examples. See one such example in figure T2. Similarly, you can have counter-examples for AAA.

ਇਹ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ। ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਲਦ ਹੀ ਪਤਾ ਲਗਾ ਲੈਣਗੇ ਕਿ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ

ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ: ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਕਿਹੜੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ। ਕੁਝ ਅਨੁਮਾਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਭਭਕ/SSA ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਤਿਆਰ ਰਹਿਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 2 ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇਖੋ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਕਕਕ/AAA ਲਈ ਵੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤਿਆਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

Students will feel more convinced about SSS, and you can use this opportunity to ask them why they are so confident about it. Conclude this activity by talking about congruency tests that work, and elicit from students the reasons why those work.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਭਭਕ ਤੇ ਜਿਆਦਾ ਭਰੋਸਾ ਦਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਮੌਕੇ ਉਹਨਾਂ ਤੋਂ ਪੁੱਛ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਇਨ੍ਹਾਂ ਭਰੋਸੇਮੰਦ ਕਿਉਂ ਹਨ। ਇਸ ਗਤੀਵਿਧੀ ਨੂੰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਿਮਨਤਮ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੱਸ ਕੇ, ਅਤੇ ਇਹ ਕਿਵੇਂ ਕੰਮ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਦੱਸ ਕੇ ਖਤਮ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

Task 6: Constructing a quadrilateral

ਕਾਰਜ 6: ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ (Quadrilateral) ਬਣਾਉਣਾ

Q1a. Now that you all know how to make a congruent triangle, let us figure out how to make a congruent quadrilateral. So if the minimum conditions for making a congruent triangle are three, what should be enough for a quadrilateral?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਓ. ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣਾ ਸਿੱਖ ਗਏ ਹਾਂ, ਚਲੋ ਹੁਣ ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਉਣਾ ਸਿੱਖਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹਨ, ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜ ਲਈ ਨਿਮਨਤਮ ਸ਼ਰਤਾਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ?

If the students' answer to Q1a is "four", ask them why they think it is four, and which four. Ask them if they would get a unique quadrilateral, given information, for example, about all the four sides. Then give them Q1b. At first, many students may draw squares, but when prompted to get different quadrilaterals, they will get multiple rhombuses.

ਜੇਕਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਉੱਤਰ "ਚਾਰ" ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਪੁੱਛੋ ਚਾਰ ਹੀ ਕਿਉਂ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਚਾਰ ਸ਼ਰਤਾਂ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪੁੱਛੋ ਕਿ ਜਿਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ ਜੇ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ, ਕੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਮਿਲੇਗੀ? ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਵਰਗ (Square) ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੱਖੋ-ਵੱਖ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦੇਵੋਗੇ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ (Rhombus) ਬਣਾ ਲੈਣਗੇ।

Q1b. Now, given that all the sides of a quadrilateral are 3 cm, think about all the different quadrilaterals that you can draw. Draw the figures on the given blank sheet.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅ. ਹੁਣ ਤੁਹਾਨੂੰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਉਣੀ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜ 3 ਸੈ.ਮੀ. ਹੈ। ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਜਿੰਨੀਆਂ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਬਣਾਉ। ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਖਾਲੀ ਪੰਨੇ ਤੇ ਬਣਾਉ।

Q2. Did you or your partner get different quadrilaterals for Q1b?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਕੀ ਤੁਹਾਡੀ ਅਤੇ ਤੁਹਾਡੇ ਸਾਥੀ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਈਆਂ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਅਲੱਗ ਹਨ?

Q3. So, if only the sides are given, is it always possible to get different quadrilaterals? How do you know?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3. ਜੇਕਰ ਸਿਰਫ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ, ਕੀ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਅਲੱਗ ਚਤੁਰਭੁਜ ਮਿਲਣਗੀਆਂ? ਤੁਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?

Q4. Imagine that you have to write to your friend about a quadrilateral. Now think of the minimum

information that you can send him/her, such that he/she gets the exact same quadrilateral as the one you had in your mind. What information will you send?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4. ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਾਰੇ ਦੱਸਣਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋ ਜੋ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਭੇਜੋਗੇ, ਜਿਸ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਉਸਨੂੰ ਉਹੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਮਿਲੇਗਾ ਜਿਹੜਾ ਤੁਹਾਡੇ ਦਿਮਾਗ ਵਿੱਚ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਕੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਵੋਗੇ?

Remember, in the case of quadrilaterals, you also have the diagonals. So four sides, four angles, and two diagonals, a total of ten measures form the maximum information. Give the students sufficient time to come up with combinations of information. As we ruled out four as minimum information, let us stick to five minimum measures. Collect the students' conjectures and conduct a discussion about how it would work or not work. Some examples we received while working with Class 8 learners are as follows:

- 4 sides and 1 diagonal
- 2 adjacent sides and 3 angles
- 3 sides and 2 included angles

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਣ (Diagonals) ਵੀ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ, ਚਾਰ ਕੋਣ, ਅਤੇ ਦੋ ਵਿਕਰਣ ਕੁੱਲ ਦਸ ਮਾਪ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹਨ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਸੁਮੇਲ ਨਾਲ ਆਉਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸਮਾਂ ਦਿਓ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਚਾਰ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਵਜੋਂ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਚਲੇ ਹੁਣ ਪੰਜ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰੀਏ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅੰਦਾਜ਼ੇ ਇਕੱਤਰ ਕਰੋ ਅਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰੋ ਇਹ ਕਿਵੇਂ ਕੰਮ ਕਰਨਗੇ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕੰਮ ਕਰਨਗੇ। ਕਲਾਸ 8 ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨ ਦੌਰਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈਆਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ:

- ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ (Diagonal)
- ਦੋ ਨਾਲ ਲਗਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਕੋਣ
- ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਕੋਣ

Another reasoning about why we need five pieces of information can be something like this: "To construct a quadrilateral, one needs to fix four points or vertices. By now we know that to fix three points we need three conditions (triangle). We now need to fix the fourth point. The information we have is in terms of either an angle or a length. An angle gives a straight line and a length gives us a circle. So it is clear that one condition is not enough to fix the fourth point, so we will need at least five conditions".

ਸਾਨੂੰ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਪੰਜ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦੀ ਕਿਉਂ ਲੋੜ ਹੈ ਇਸ ਬਾਰੇ ਇਕ ਹੋਰ ਤਰਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ: "ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ, ਚਾਰ ਕੋਣਬਿੰਦੂਆਂ (Vertices) ਨੂੰ ਫਿਕਸ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਕੋਣਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪੱਕਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ (ਤਿਕੋਣ) ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਹੁਣ ਚੌਥੇ ਨੁਕਤੇ ਨੂੰ ਫਿਕਸ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਜੋ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੈ ਉਹ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਜਾਂ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇੱਕ ਕੋਣ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ ਰੇਖਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲੰਬਾਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਇਕ ਸ਼ਰਤ ਚੌਥੇ ਨੁਕਤੇ ਨੂੰ ਠੀਕ ਕਰਨ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਪੰਜ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ।

Students can actually construct these examples and see whether they get a pair of congruent triangles. However, a general strategy to understand is to see how two congruent triangles when joined, give rise to a quadrilateral. This understanding can be used to deduce the congruency conditions for quadrilaterals. Joining two triangles reduces the information needed from six to five conditions, as one side overlaps.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੀ ਜੋੜੀ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਹਾਲਾਂਕਿ, ਸਮਝਣ ਦੀ ਇਕ ਆਮ ਰਣਨੀਤੀ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਵੇਂ ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਜੁੜਨ ਤੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਮਝ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ (Congruence) ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਦੋ ਤਿਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੁੜਨ ਤੇ ਸ਼ਰਤਾਂ ਘੱਟ ਕੇ ਛੇ ਤੋਂ ਪੰਜ ਰਹਿ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਕ ਭੁਜਾ ਸਾਂਝੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

Check whether what you suggested as the minimum information really works. Try drawing different quadrilaterals for the information you said you would give your friend in the question above.

ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਵਾਲਾ ਸੁਝਾਅ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨਾਲ ਵੱਖੋ-ਵੱਖਰੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਜੋ ਤੁਸੀਂ ਕਿਹਾ ਸੀ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦੇਵੋਗੇ।

Q5. Think about why this set of information will lead to congruent or non-congruent quadrilaterals.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5. ਇਸ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋ ਕਿ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਾ ਇਹ ਸਮੂਹ ਕਿਉਂ ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇਵੇਗਾ ਜਾਂ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਦੇਵੇਗਾ?

Q6. List the conditions that worked for constructing a unique quadrilateral.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6. ਉਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਓ ਜਿਹਨਾਂ ਨਾਲ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਹੋਇਆ।

Some standard conditions that will give congruent quadrilaterals are given below for your reference.

- Three adjacent sides and two included angles within those sides
- Three angles and two included sides within those angles

Some standard conditions that will give congruent quadrilaterals are given below for your reference.

- Three adjacent sides and two included angles within those sides
- Three angles and two included sides within those angles

ਕੁਝ ਆਮ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਿਹੜੀਆਂ ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇਣਗੀਆਂ, ਤੁਹਾਡੇ ਹਵਾਲੇ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ:

- ਤਿੰਨ ਨਾਲ ਲੱਗਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ
- ਤਿੰਨ ਕੋਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ
- ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ (Congruence) ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ:
ਕਕਕਭਭ, ਕਕਭਕਭ, ਕਭਕਭਕ, ਭਕਭਕਭ
- ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇਕ ਕੋਣ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇਕਸਾਰ ਹੋਣ।
ਭਭਭਭਕ

In the quadrilaterals ABCD' and ABCD'',

$\angle(AB) = 5$, $\angle(BC) = 6$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\angle(AD') = \angle(AD'') = 4$ and $\angle(CD') = \angle(CD'') = 5$.

But $ABCD' \not\cong ABCD''$

ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD' and ABCD'' ਵਿੱਚ,

$\angle(AB) = 5$, $\angle(BC) = 6$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\angle(AD') = \angle(AD'') = 4$ and $\angle(CD') = \angle(CD'') = 5$.

ਪਰ $ABCD' \not\cong ABCD''$

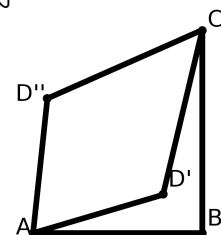


Figure T3

Refuting a SSSSA conjecture

ਚਿੱਤਰ T3

ਭਭਭਭਕ ਅਨੁਮਾਨ ਨੂੰ ਰੱਦ ਕਰਨਾ

Task 7: Some special triangles and quadrilaterals

ਕਾਰਜ 7: ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਿਕੋਣ ਅਤੇ ਚਤੁਰਭੁਜ

We have found out the minimum information needed to draw congruent triangles and congruent quadrilaterals, but let us look at some special triangles and quadrilaterals and find out the minimum information we need to construct these.

ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਹੈ, ਪਰ ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਿਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵੇਖੀਏ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕੀਏ ਜੋ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਹੈ।

Q1. How many conditions do you need to construct congruent equilateral triangles?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਮਰੂਪ (Congruent) ਸਮਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣ (Equilateral triangle) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ?

The students will find out that only the length of the equilateral triangle is enough to draw a congruent triangle. In fact, by giving the length of the side of an equilateral triangle, you are giving all the 6 pieces of information (3 sides and 3 angles). Do emphasise this while discussing this task.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਗੇ ਕਿ ਸਮਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣ ਦੀ ਸਿਰਫ਼ ਲੰਬਾਈ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ, ਇਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੀ 6 ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਰਹੇ ਹੋ (3 ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ 3 ਕੋਣ)। ਇਸ ਕਾਰਜ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰੇ ਸਮੇਂ ਇਸ 'ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿਓ।

Q2. How many pieces of information do you need to construct congruent squares?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਸਮਰੂਪ ਵਰਗ (Square) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ?

The students will find out that only the length of the side is enough to draw congruent squares. In fact, by saying that it is a square and giving the length of the side of a square, you are giving all the 8 conditions (4 sides and 4 angles; all angles are 90°). Do emphasise this while discussing this task.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਗੇ ਕਿ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਸਮਰੂਪ ਵਰਗ ਨੂੰ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿਚ, ਇਹ ਕਹਿ ਕੇ ਕਿ ਇਹ ਇਕ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਇਕ ਵਰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ 8 ਮਾਪ ਦੇ ਰਹੇ ਹੋ (4 ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ 4 ਕੋਣਾਂ; ਸਾਰੇ ਕੋਣ 90° ਹਨ)। ਇਸ ਕਾਰਜ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰੇ ਸਮੇਂ ਇਸ 'ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿਓ।

Q3. How many pieces of information do you need to construct congruent rectangles?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3. ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਮਰੂਪ ਆਇਤਾਕਾਰ (Rectangle) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ?

The students will find out that in the case of rectangles, you need the lengths of two adjacent sides. In fact, by giving the lengths of two adjacent sides of a rectangle, you are giving all the 8 conditions (4 sides—opposite sides are equal; 4 angles—all angles are 90°). Do emphasise this while discussing this task.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਗੇ ਕਿ ਆਇਤਾਕਾਰਾਂ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿਚ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਨਾਲ ਲੱਗਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ, ਇਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਨਾਲ ਲੱਗਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ 8 ਮਾਪ ਦੇ ਰਹੇ ਹੋ (4 ਭੁਜਾਵਾਂ — ਵਿਰੋਧੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ; 4 ਕੋਣ — ਸਾਰੇ ਕੋਣ 90° ਹਨ)। ਇਸ ਕੰਮ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰੇ ਸਮੇਂ ਇਸ 'ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿਓ।

Q4. How many pieces of information do you need to construct congruent rhombuses?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4. ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਮਰੂਪ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ (Rhombus) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ?

The students will find out that in the case of rhombus, you need the length of one side and one angle. In fact, by giving the length of one side and the measure of one angle of a rhombus, you are giving all the 8 conditions (4 sides—all sides are equal; 4 angles—adjacent angles are complementary and opposite angles are equal). Do emphasise this while discussing this task.

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਗੇ ਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ ਦੇ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ 8 ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹੋ (4 ਭੁਜਾਵਾਂ — ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ; 4 ਕੋਣ — ਨਾਲ ਲੱਗਦੇ ਕੋਣ ਪੂਰਕ ਹਨ ਅਤੇ ਵਿਰੋਧੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ)। ਇਸ ਕਾਰਜ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰੇ ਸਮੇਂ ਇਸ 'ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿਓ।

Q5. How many pieces of information do you need to construct congruent parallelograms?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5. ਸਮਰੂਪ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ (Parallelogram) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ?

In the case of parallelograms, you need the lengths of two adjacent sides and the including angle. In fact, by giving the lengths of two adjacent sides of a parallelogram and the including angle, you are giving all the 8 conditions (4 sides—opposite sides are equal; 4 angles—opposite angles are equal and adjacent angles are complimentary). Do underline this while discussing this task.

ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਨਾਲ ਲੱਗਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਵਿਚਲੇ ਕੋਣ ਦੇਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ, ਇੱਕ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਨਾਲ ਲੱਗਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਕੇ ਅਤੇ ਵਿਚਲੇ ਕੋਣ ਦੇ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ 8 ਮਾਪ ਦੇ ਰਹੇ ਹੋ (4 ਭੁਜਾਵਾਂ — ਵਿਪਰੀਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ; 4 ਕੋਣ-ਵਿਰੋਧੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਲੱਗਦੇ ਕੋਣ ਪੂਰਕ ਹਨ)। ਇਸ ਕਾਰਜ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰੇ ਸਮੇਂ ਇਸ 'ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿਓ।

Q6. How many pieces of information do you need to construct congruent trapeziums?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6. ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਮਰੂਪ ਸਮਲੰਬਾਤਮਕ ਚਤੁਰਭੁਜ (Trapezium) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ?

In the case of trapeziums, you need the length of one non-parallel side, length of the base, and measure the two bases angles. By saying that the quadrilateral is a trapezium, you can construct the other parallel side from the given information.

ਸਮਲੰਬਾਤਮਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਗੈਰ-ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਅਧਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਦੋ ਅਧਾਰਾਂ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਹਿ ਕੇ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬਾਤਮਕ ਚਤੁਰਭੁਜ (Trapezium) ਹੈ, ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸਮਾਂਤਰ ਪਾਸੇ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

If you look at all the tasks together, you will notice that to construct congruent squares one needs only one piece of information explicitly, for rectangles and rhombus it will be two pieces of information, for parallelogram it is three, and for trapeziums it is four. If we recall, squares are special cases of rectangle or rhombuses, rectangles or rhombuses are special cases of parallelograms, and parallelograms are special cases of trapezium.

ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ ਕਾਰਜਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਵੇਖਦੇ ਹੋ, ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਸਮਰੂਪ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਿਰਫ

ਇਕ ਸ਼ਰਤ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਆਇਤਾਕਾਰ (Rectangle) ਅਤੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ (Rhombus) ਲਈ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ (Parallelogram) ਲਈ ਇਹ ਤਿੰਨ ਹਨ, ਅਤੇ ਸਮਲੰਬਾਤਮਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਲਈ ਇਹ ਚਾਰ ਹਨ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਵਰਗ ਆਇਤਾਕਾਰ ਜਾਂ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੇਸ ਹਨ, ਆਇਤਾਕਾਰ ਜਾਂ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੇਸ ਹਨ, ਅਤੇ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਲੰਬਾਤਮਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੇਸ ਹਨ।

So as you construct more and more general quadrilaterals, you will need more pieces of information to construct unique ones, till you reach five pieces of information.

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਵਧੇਰੇ ਅਤੇ ਵਧੇਰੇ ਸਧਾਰਣ ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਵਿਲੱਖਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਵਧੇਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ ਪੰਜ ਸ਼ਰਤਾਂ ਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚ ਜਾਂਦੇ।

Task 8: Constructing a pentagon

ਕਾਰਜ 8: ਪੰਜਭੁਜ (Pentagon) ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨਾ

Q1. Now that you all know what conditions give constructions of congruent triangles or congruent quadrilaterals, let us figure out how to construct congruent pentagons. So, if the minimum conditions for making congruent triangles are three, and that for congruent quadrilaterals are five, what do you think is the number of minimum conditions needed to construct congruent pentagons?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1. ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣਾਂ ਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਆਉ ਆਪਾਂ ਇਹ ਸਮਝੀਏ ਕਿ ਸਮਰੂਪ ਪੰਜਭੁਜਾਵਾਂ ਕਿਵੇਂ ਬਣਾਈਏ। ਇਸ ਲਈ, ਜੇ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜ ਲਈ ਪੰਜ ਸ਼ਰਤਾਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਖਿਆਲ ਵਿਚ ਸਮਰੂਪ ਪੰਜਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੀ ਹੈ?

Mostly, the students will answer seven, by looking at the pattern. Though the answer is correct, probe the students to find some of the seven conditions, such that they give a unique pentagon. ਜਿਆਦਾਤਰ, ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਜਵਾਬ ਸੱਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਪੈਟਰਨ(ਸ਼ੈਲੀ) ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਦੱਸ ਦੇਣਗੇ। ਹਾਲਾਂਕਿ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ, ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਕੁੱਝ ਸ਼ਰਤਾਂ ਲੱਭਣ ਲਈ ਕਹੋ, ਜੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਲੱਖਣ ਪੰਜਭੁਜ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

Q2. Imagine that you have to write to your friend about a pentagon. Now think of the minimum information that you can send him/her, such that he/she gets the exact same pentagon as the one you had in your mind. What information you will send?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2. ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਪੰਜਭੁਜ ਬਾਰੇ ਦੱਸਣਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋ ਜੋ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਭੇਜੋਗੇ, ਜਿਸ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਉਸਨੂੰ ਉਹੀ ਪੰਜਭੁਜ ਮਿਲੇਗਾ ਜਿਹੜਾ ਤੁਹਾਡੇ ਦਿਮਾਗ ਵਿੱਚ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਕੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਵੋਗੇ?

As in the case of quadrilaterals, for pentagons there will be diagonals. So five sides, five angles, and five diagonals, a total of fifteen measures form the maximum information. Give the students sufficient time to come up with combinations of information. Collect the students' conjectures and conduct a discussion about how it would work or not work.

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿਚ ਸੀ, ਪੰਜਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵੀ ਵਿਕਰਣ (Diagonal) ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਪੰਜ ਭੁਜਾਵਾਂ, ਪੰਜ ਕੋਣ ਅਤੇ ਪੰਜ ਵਿਕਰਣ, ਕੁਲ ਪੰਦਰਾਂ ਮਾਪ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹਨ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਸੁਮੇਲ ਨਾਲ ਆਉਣ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਸਮਾਂ ਦਿਓ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅਨੁਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਤਰ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਕਿਵੇਂ ਕੰਮ ਕਰੇਗੀ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗੀ।

Check whether what you suggested as the minimum information really works. Try drawing different pentagons for the information you said you would give your friend in the question above.

ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜੋ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੁਝਾਅ ਵਜੋਂ ਦਿੱਤੀ ਹੈ, ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨਾਲ ਵੱਖੋ-ਵੱਖਰੇ ਪੰਜਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਜੋ ਤੁਸੀਂ ਕਿਹਾ ਸੀ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਦੋਸਤ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦੇਵੋਗੇ।

Q3. Think about why this set of information will lead to congruent or non-congruent pentagons.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3. ਇਸ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋ ਕਿ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਾ ਇਹ ਸਮੂਹ ਕਿਉਂ ਸਮਰੂਪ ਪੰਜਭੁਜਾਂ (Pentagons) ਬਣਾਏਗਾ।

Q4. List the conditions that worked for making a unique pentagon.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4. ਉਹਨਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਓ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਵਿਲੱਖਣ ਪੰਜਭੁਜ (Pentagon) ਬਣਾਇਆ।

Some sets of conditions that give congruent pentagons are given below for your reference.

- All 5 sides and 2 of the diagonals
- All 4 sides and 3 included angles
- 4 angles and their included sides

ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਸਮੂਹ ਜੋ ਸਮਰੂਪ ਪੰਜਭੁਜ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਤੁਹਾਡੇ ਹਵਾਲੇ ਲਈ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

- ਸਾਰੀਆਂ 5 ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ 2 ਵਿਕਰਣ
- ਸਾਰੀਆਂ 4 ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚਲੇ ਕੋਣ
- 4 ਕੋਣ ਅਤੇ ਵਿੱਚਲੀਆਂ 3 ਭੁਜਾਵਾਂ

Task 9: Finding the number of conditions to construct a congruent polygon

ਕਾਰਜ 9: ਇਕ ਸਮਰੂਪ ਬਹੁਭੁਜ (Polygon) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਲੱਗਣਗੀਆਂ

Now that you know the minimum conditions needed for constructing congruent triangles, congruent quadrilaterals and congruent pentagons, let us explore how many conditions are needed for constructing congruent hexagons, or congruent heptagons.

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ, ਸਮਰੂਪ ਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਪੰਜਭੁਜ (Pentagon) ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰੀਏ ਕਿ ਸਮਰੂਪ ਛੇਭੁਜ (Hexagon) ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਸੱਤਭੁਜ (Heptagon) ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

Make some guesses, and make constructions on the given sheets of paper. Record your guesses in Table 1 below.

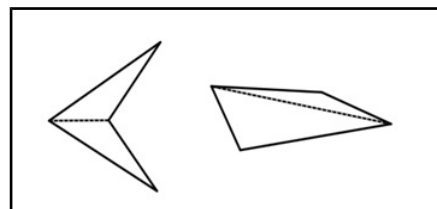
ਕੁਝ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਓ, ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਾਗਜ਼ਾਂ ਦੇ ਪੰਨਿਆਂ ਤੇ ਉਸਾਰੀਆਂ ਕਰੋ। ਆਪਣੇ ਅਨੁਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ 1 ਵਿੱਚ ਦਰਜ ਕਰੋ।

Table 1 *Conditions required for constructing a congruent polygon***ਸਾਰਣੀ 1** ਸਮਰੂਪ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤਾਂ

Number of sides in the polygon ਬਹੁਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	Name of the polygon ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਨਾਮ	Minimum conditions required for constructing a congruent polygon ਸਮਰੂਪ ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਿਮਨਤਮ ਸ਼ਰਤਾਂ
3	Triangle ਤਿਕੋਣ	3
4	Quadrilateral ਚਤੁਰਭੁਜ	5
5	Pentagon ਪੰਜਭੁਜ	_____
6	Hexagon ਛੇਭੁਜ	_____
7	Heptagon ਸੱਤਭੁਜ	_____
8	Octagon ਅੱਠਭੁਜ	_____

Some students may complete the table by observing the pattern. Some students may struggle with the table. Give ample time to the students and then collect responses to complete the table on the board.

ਕੁਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪੱਤਰ ਨਮੂਨਿਆਂ ਨੂੰ ਵੇਖਦਿਆਂ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।
ਕੁਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਾਰਣੀ ਨਾਲ ਸੰਘਰਸ਼ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ
ਕਾਫੀ ਸਮਾਂ ਦਿਓ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਜਵਾਬਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰੋ।

**Figure 1:** Triangulation of quadrilaterals**ਚਿੱਤਰ 1 :** ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ**Proving our Conjectures****ਸਾਡੇ ਅਨੁਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨਾ।**

Let us find out how can we prove which guesses are right and which ones are wrong.

Draw a quadrilateral.

Draw a diagonal inside the quadrilateral so that it splits into two triangles.

See Figure 1.

(Here we have drawn two different types of quadrilaterals).

ਆਉਂਦੇ ਜਾਣੀਏ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਵੇਂ ਸਾਬਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਹੜੇ ਅਨੁਮਾਨ ਸਹੀ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਗਲਤ ਹਨ।

ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਓ।

ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅੰਦਰ ਇਕ ਵਿਕਰਣ (Diagonal) ਬਣਾਉ, ਜੋ ਕਿ ਇਸਨੂੰ ਦੋ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਦੇਵੇਗੀ।

ਚਿੱਤਰ 1 ਵੇਖੋ।

(ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਏ ਹਨ।)

We see that every quadrilateral can be split into two triangles in this way. We know that for constructing a unique triangle we need three minimum conditions.

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦੋ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

So in this case, to construct the first triangle we needed three minimum conditions. For the next triangle, we need three more, but as one side overlaps, we need only two conditions to construct a triangle congruent to the second triangle. These can be, for example, one side and the angle it makes with the adjacent side of the quadrilateral. Alternatively, one can also give two angles.

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਹਿਲੇ ਤਿਕੋਣ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਸੀ। ਦੂਸਰੇ ਤਿਕੋਣ ਲਈ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਪਵੇਗੀ, ਪਰ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਭੁਜ ਸਾਂਝੀ ਹੈ, ਦੂਜੇ ਤਿਕੋਣ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਤਿਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਿਰਫ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਇਹ ਸ਼ਰਤਾਂ, ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ, ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਜੋ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਨਾਲ ਲੱਗਦੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਾਂ ਦੋ ਕੋਣ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

Another way of thinking about this is, once we fix the first triangle, three vertices of the quadrilateral are fixed. So to fix the remaining vertex, two conditions (as in the examples above) are sufficient. Hence these five conditions are the minimum pieces of information needed to construct a quadrilateral.

ਇਸ ਬਾਰੇ ਸੋਚਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤਰੀਕਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਾਰ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਤਿਕੋਣ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ ਤੈਅ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨ ਕੋਣਬਿੰਦੂ (Vertex) ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਾਕੀ ਦੇ ਕੋਣਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ, ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਪਕੇਰਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ) ਕਾਫ਼ੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪੰਜ ਸ਼ਰਤਾਂ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਵਜੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ।

This also reconfirms our understanding of the minimum conditions needed to construct a unique quadrilateral.

ਇਹ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਸਾਡੀ ਸਮਝ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵੀ ਕਰਦਾ ਹੈ।

What will happen if we do the same for a pentagon?

ਜੇ ਅਸੀਂ ਪੰਜਭੁਜ (Pentagon) ਲਈ ਵੀ ਅਜਿਹਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

Let us draw a pentagon and see how many triangles the pentagon can be split into by drawing a minimum number of diagonals. We see from figure 2 that by drawing two diagonals, the pentagon can be split into three triangles.

ਆਉਂ ਇੱਕ ਪੰਜਭੁਜ ਬਣਾਈਏ ਅਤੇ ਵੇਖੀਏ ਕਿ ਪੰਜਭੁਜ ਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਵਿਕਰਣ ਬਣਾ ਕੇ ਕਿੰਨੇ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 2 ਤੋਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਵਿਕਰਣ ਖਿੱਚਣ ਨਾਲ ਪੰਜਭੁਜ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

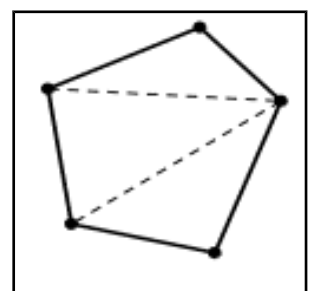


Figure 2

For the first triangle we need three conditions, for the second triangle we need another three, but then one side overlaps so we need only two. Similarly, for the third triangle, we need two more conditions.

ਪਹਿਲੇ ਤਿਕੋਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਦੂਸਰੇ ਤਿਕੋਣ ਲਈ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਹੋਰ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਪਰ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸਾਂਝਾ ਹੋਣ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਉਸ ਤਿਕੋਣ ਵਾਸਤੇ ਸਿਰਫ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰੇ ਤਿਕੋਣ ਲਈ ਵੀ, ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਹੋਰ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

So, you can see that whenever you add a triangle, you add two conditions. So, the minimum conditions necessary for constructing a unique pentagon, are seven ($3 + 2 + 2$).

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜਦੋਂ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਤਿਕੋਣ ਜੋੜਨ ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜੋੜਨੀਆਂ ਪੈਣਗੀਆਂ। ਇਸ ਲਈ, ਇਕ ਵਿਲਖਣ ਪੰਜਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਜਰੂਰੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ, ਸੱਤ ਹਨ($3+2+2$)।

Let us try to figure this out for hexagons, heptagons, and octagons.

ਆਉ, ਅਸੀਂ ਛੇਭੁਜ (Hexagon), ਸੱਤਭੁਜ (Heptagon) ਅਤੇ ਅੱਠਭੁਜ (Octagon) ਲਈ ਵੀ ਜਾਣਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ।

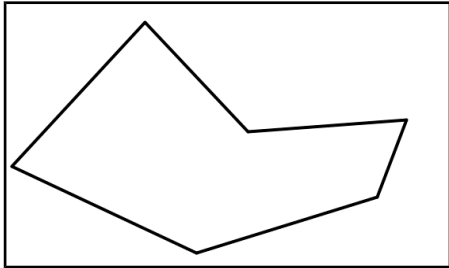


Figure 3

2. How many triangles can a hexagon be split into? (Remember that the number of diagonals drawn must be a minimum.) _____

2. ਇਕ ਛੇਭੁਜ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ?(ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।) _____

3. What is the minimum number of conditions needed to construct unique hexagons? _____

3. ਵਿਲਖਣ ਛੇਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ? _____

4. Why?

4. ਕਿਉਂ?

5. How many triangles can a heptagon be split into? _____

5. ਇਕ ਸੱਤਭੁਜ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ? _____

6. What is the minimum number of conditions needed to construct unique heptagon? _____

6. ਵਿਲਖਣ ਸੱਤਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ? _____

7. Why?

7. ਕਿਉਂ?

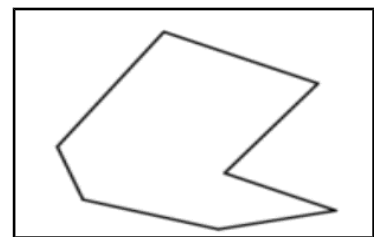


Figure 4

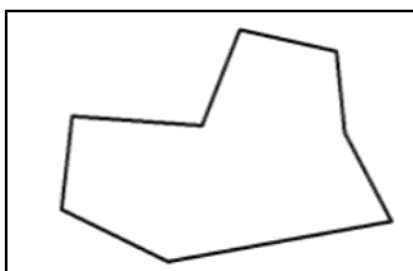


Figure 5

8. How many triangles can an octagon be split into? _____

8. ਅੱਠਭੁਜ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ? _____

9. What is the minimum number of conditions needed to construct congruent octagon? _____

9. ਸਮਰੂਪ ਅੱਠਭੁਜ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨ ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ? _____

10. Why?

10. ਕਿਉਂ?

It is interesting to see what is the minimum information needed to construct a unique polygon. Let us start with a polygon with n sides. To fix the first three vertices, we need three conditions. For each of the $n - 3$ remaining vertices, we need at least two pieces of information or conditions. Hence we need at least $2(n - 3) + 3 = 2n - 3$ conditions. But the process of dividing

the polygon into $n - 2$ triangles tells us that $2n - 3$ conditions are sufficient to construct a unique polygon. So, the number of minimum conditions required to construct a unique polygon is $2n - 3$.

ਇਹ ਵੇਖਣਾ ਦਿਲਚਸਪ ਹੈ ਕਿ ਵਿਲੱਖਣ ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਆਉਂ n ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਬਹੁਭੁਜ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕਰੀਏ। ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਕੋਣਬਿੰਦੂ ਲਾਉਣ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ। ਹਰੇਕ $n-3$ ਬਾਕੀ ਕੋਣ ਬਿੰਦੂ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $2(n-2)+3=2n-3$ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਪਰ ਬਹੁਭੁਜ ਨੂੰ $n-2$ ਤਿਕੋਣਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ $2n-3$ ਸ਼ਰਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਾਫੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਲੱਖਣ ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $2n-3$ ਹੈ।

Suggested readings

1. Simple argument about the number of minimum conditions needed to construct congruent polygons
<https://www.mathopenref.com/congruentpolygonstests.html>
2. A simulation to check congruent polygons by super-positioning
<https://www.mathopenref.com/congruentpolygons.html>
3. Interesting examples of congruence
<https://www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/geom07.htm>
4. Detailed proof of why the number of minimum conditions needed to construct congruent n-gons is $2n-3$
http://www.amesa.org.za/amesal_n21_a12.pdf

References

- Plaksin, O., & Patkin, D. (2016). Exploring the minimum conditions for congruency of polygons. *Learning and Teaching Mathematics*, No.2, pp.42-46.
http://www.amesa.org.za/amesal_n21_a12.pdf
- Page, John D. *Congruent polygons*. From Math Open Reference.
<https://www.mathopenref.com/congruentpolygons.html>

Credits

Main Authors: Aaloka Kanhere, Shweta Naik

Contributing Authors: Harita Raval, Tuba Khan

Reviewers: Amber Habib, Amol Dighe, H. C. Pradhan, Jonaki Ghosh, Sneha Titus

Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam

Punjabi Translator: Harkirat Singh Sahota

Punjabi Reviewers: Harvinder Kaur Jassal, Amarjit Kaur

Creative Commons Licence: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE