Euclid's Game

யூக்ளிடின் விளையாட்டு

Overview

சுருக்கம்

Here is a game that is based on the Euclidean algorithm to find the highest common factor of two natural numbers. In this game, students not only play the game making moves that correspond to steps of the Euclidean algorithm, but also engage in *doing* mathematics by making conjectures, giving counter-examples, refuting conjectures, and proving the results.

இந்த விளையாட்டின் மூலம் யூக்ளிடியப் படிமுறைத்தீர்வைப் பயன்படுத்தி இரு இயல் எண்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் (மீ.பொ.வ) கணக்கிடலாம். இவ்வழிமுறையைப் பின்பற்றி கணக்குச் செய்வதோடு மட்டும் மாணவர்கள் நிறுத்திக் கொள்ளபோவதில்லை . ஊகங்களை உருவாக்குதல் , அவற்றை நிராகரித்தல் , எதிர்-உதாரணங்களை வழங்குதல், மற்றும் முடிவுகளை நிரூபித்தல் போன்ற செயல்பாடுகளின் மூலம் கணிதம் செய்வதிலும் ஈடுபடுவார்கள்.

An important idea is that we need to look for counter-examples to find out that a statement is not true. As a part of this unit, you should talk to the students and try to differentiate between a true prediction and a mathematical result. Also discuss how in the case of establishing the correctness of a mathematical result, giving examples is not enough; while in the case of proving a result wrong, counter-examples are enough.

ஒரு கூற்றுப் பொய்யானது என்பதைத் தெரிந்துகொள்வதற்கு எதிர் -உதாரணங்களை நாம் கண்டுபிடிப்பது முக்கியமான ஒரு கருத்தாகும் . இந்தக் கற்றல் பிரிவின் ஒரு பகுதியில், ஒரு கணித தீர்விற்கும் ஒரு சரியான கணிப்பிற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டை ஆசிரியர்கள் விளக்க வேண்டும். மேலும், ஒரு கணித தீர்வைச் சரிபார்க்க உதாரணங்கள் போதாது என்றும் ஆனால் அதைப் பொய்க்க எதிர் -உதாரணங்கள் போதுமானவை என்பதைக் குறித்தும் நீங்கள் உரையாட வேண்டும்.

Minimum time: Three sessions of 40 minutes each**.**

குறைந்தபட்ச நேரம்: 40 நிமிடங்களைக் கொண்ட மூன்று அமர்வுகள்.

Type of Learning Unit: Classroom-based.

கற்றல் பிரிவின் வகை: வகுப்பறைப் பாடம்

Unit-specific objectives

பாடப்பிரிவின் இலக்குகள்

(i) To observe patterns in numbers and articulate the observed pattern clearly

(i) எண் அமைப்புகளைக் கவனித்து, நீங்கள் கவனித்த அமைப்பைத் தெளிவாக விவரித்தல்.

(ii) To look for counter-examples to refute a conjecture

(ii) ஓர் ஊகத்தைப் பொய்யென நிரூபிக்க எதிர்-உதாரணங்களைத் தேடுதல்.

(iii) To understand that examples are not sufficient to prove a conjecture

(iii) ஓர் ஊகத்தை நிரூபிக்க உதாரணங்கள் மட்டுமே போதாது என்பதைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.

(iv) To understand that just one counter-example is sufficient to disprove a conjecture

(iv) ஓர் ஊகத்தைப் பொய்யென நிரூபிக்க ஓர் எதிர்-உதாரணம் போதுமானது என்பதைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.

(v) To come up with a logical argument (i.e. a proof) in support of a conjecture

(v) ஓர் ஊகத்திற்கு வலுசேர்க்கும் தர்க்க வாதங்களை (அதாவது, ஒரு நிரூபணம்) யோசித்தல்.

(vi) To understand the relation between taking successive differences and the Euclidean algorithm to find the highest common factor (HCF) of two numbers

(vi) யூக்ளிடியப் படிமுறைத்தீர்வைக் கொண்டு இரு எண்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் கணக்கிடுவதற்கும், தொடர்ச்சியாக எண்களைக் கழிப்பதிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.

Links to curriculum

பாடத்திட்டத்துடன் உள்ள தொடர்புகள்

NCERT Maths Class 6: The concepts of factors, relatively prime (co-prime) numbers and multiples (Chapter 3)

NCERT Maths Class 6: The concept of Highest Common Factor (HCF)(Chapter 3)

NCERT Maths Class 10: Euclid’s Lemma (Chapter 1)

Materials: Blackboard, chalk and sheets of paper**.**

பொருட்கள்: கரும்பலகை, சாக் (chalk), காகிதத் தாள்கள்

Introduction

அறிமுகம்

Playing games is a lot of fun. Today you are going to play a game that involves numbers, and you will find a way to win the game, always!

விளையாடுதல் நமக்கு மிகுந்த மகிழ்ச்சியைத் தரும் ஒரு செயலாகும் . எண்களைக் கொண்டு இன்று நாம் விளையாட போகிறோம் . இதில் எப்போதுமே வெற்றிபெறுவதற்கான உத்தியையும் நீங்கள் தெரிந்துக்கொள்ள போகிறீர்கள்.

Task 1: Play the Euclid’s game

முதல் செயல்: யூக்ளிடின் விளையாட்டு

1. This is a two-player game.

1. விளையாட இரு நபர்கள் தேவை.

2. The rules of the game are as follows.

2. விளையாட்டின் விதிகள் பின்வருமாறு.

- You can decide who plays first.The first player, say Player 1, writes down a number that is between 1 and 100, including both. Let us call this number ‘A’. The second player, say Player 2, can write down another number of his/her choice. Let’s call this number ‘B’.
- விளையாட்டை யார் தொடங்குவார்கள் என்பதை நீங்களே முடிவு செய்து கொள்ளலாம். முதல் ஆட்டக்காரர் (ஆட்டக்காரர் 1), 1 முதல் 100 வரையில் உள்ள ஓர் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டு அதை எழுத வேண்டும். இந்த எண்ணை ‘A’ எனக் கொள்வோம். இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் (ஆட்டக்காரர் 2), மிதமுள்ள 99 எண்களில் விருப்பப்பட்ட ஒன்றை எழுதிக்கொள்ளலாம். இந்த எண்ணை ‘B’ எனக் கொள்வோம்.
- Now, the first player will write the number (A – B) or (B – A), whichever is positive. Let's call this number ‘C'.
- இப்போது, முதல் ஆட்டக்காரர் (A – B) அல்லது (B – A)-ஐ கணக்கிட வேண்டும். எதில் மிகை எண்ணை (positive number) விடையாக பெறுகிறாரோ அதை அவர் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும் . இந்த எண்ணை ‘C’ எனக் கொள்வோம்.
- Next, it is the second player's turn. He/she has a choice. He/She can either write the difference between C and A or the difference between C and B. However, if one of these differences is already in the list (i.e., if it is A or B or C) then it cannot be written again. (All differences are taken to be positive.)
- பின்னர், இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் அவரது சுற்றில் (C – A) அல்லது (C – B)-இல் எதைக் கணக்கிடப்போகிறார் என்பதைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆனால், எண் தொகுப்பில் ஏற்கனவே அவ்வெண் இடம் பெற்றிருந்தால் (அதாவது, A அல்லது B அல்லது C ஆக இருந்தால்) அது மீண்டும் எழுதப்படக்கூடாது. (கழித்தலில் பெற்ற எண் மிகை எண்களாக கருதப்படும்)
- Similarly, in subsequent turns, the players take turns to write a number which is the difference between any two numbers in the list, provided the number itself is not already present in the list.
- இதேபோல, எண் தொகுப்பில் இடம்பெற்றிருக்கும் எதாவது இரு எண்களின் வித்தியாசத்தை அடுத்தடுத்த சுற்றில் கணக்கிட்டு ஆட்டக்காரர்கள் எழுதிக்கொள்வார்கள். ஆனால், அது தொகுப்பில் ஏற்கனவே இடம்பெறாத எண்ணாகவும் இருக்க வேண்டும்.
- The game ends when it is not possible to write any new number.
- கழித்தலின் மூலம், புதிதான எண் ஏதும் கிடைக்கவில்லை என்றால் ஆட்டம் முடிவுபெற்றுவிட்டதாக கருதிக்கொள்ள வேண்டும்.
- The person who writes the last number will be the winner.
- இறுதி எண்ணைப் பதிவிட்டவர்தான் ஆட்டத்தில் வெற்றி பெற்றவராவார்.

Let us look at a sample run of the game.

ஓர் எடுத்துக்காட்டை இப்போது பார்க்கலாம்.

- Suppose, the first player writes 12. The second player has 99 choices to choose his/her number (as the upper limit is 100).
- முதல் ஆட்டக்காரர் எண் 12-ஐ தேர்ந்தெடுக்கிறார் என்று எடுத்துக்கொள்வோம். இப்போது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் 99 எண்களில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். (100 எண்கள் இருக்கின்றன என்பதால்)
- Suppose, the second player chooses 16, then the first player can only write 4, i.e. the difference between 16 and 12.
- இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எண் 16-ஐ தேர்ந்தெடுக்கிறார் என்றால், முதல் ஆட்டக்காரர் எண் 4-ஐ தான் எழுத முடியும். ஏனென்றால், 16-லிருந்து 12-ஐ கழிக்கிறோம்.
- The second player then writes 8, the difference between 12 and 4. Note that the player could not have written the difference between 16 and 4, as 12 is already in the list.
- பின்னர், 12-லிருந்து 4-ஐ கழிப்பதால் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் 8-ஐ எழுதுகிறார். இவர் 16 மற்றும் 4-இன் வித்தியாசத்தை எழுதியிருக்க முடியாது ஏனென்றால் தொகுப்பில் 12 ஏற்கனவே இடம்பெற்றிருக்கிறது.
- Now there is no possibility of writing new numbers, so the game ends with the numbers 4, 8, 12, and 16 appearing in the list (12, 16, 4, 8 in the order of appearance).
- இப்போது, புதிய எண்களேதும் எழுதுவதற்கான வாய்ப்புகள் இல்லை. ஆதலால், ஆட்டத்தின் முடிவில் எண்கள் 4, 8, 12, மற்றும், 16 ஆகியவைத் தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ளது. (எழுதப்பட்ட வரிசையில் எடுத்துக்கொண்டால் 12, 16, 4, 8 ஆகும்)
- There are four numbers in the list, and the second player is the winner, as he/she wrote the last number 8.
- தொகுப்பில் மொத்தம் நான்கு எண்கள் உள்ளன . இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் வெற்றி பெற்றார், ஏனென்றால் அவர்தான் இறுதி எண் 8-ஐ எழுதினார்.

Play this game with your partner multiple times. Study the lists of numbers that you got for each game and record your observations in the table below. For the last column, where you record the winner, mention whether Player 1 (who chose the first number) won or Player 2 (who chose the second number) won.

உங்கள் நண்பருடன் இந்த ஆட்டத்தைப் பல முறை விளையாடுங்கள் . ஒவ்வொரு ஆட்டத்திலும் தொகுப்பில் இடம்பெற்ற எண்களை ஆராய்ந்து , நீங்கள் உற்றுநோக்கியவற்றைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் பதிவிடுங்கள். வெற்றி பெற்றவர் என்ற கட்டத்தில் , ஆட்டக்காரர் 1 (முதல் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்தவர்) அல்லது ஆட்டக்காரர் 2 (இரண்டாம் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்தவர்) என்று குறிப்பிடுங்கள்.

Initial Numbers		The smallest number in the list	The largest number in the list	All the numbers in the list (in ascending order)	How many numbers are there in the list?	Winner
Player 1	Player 2					

தொடக்க எண்கள்		தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ள மிகச்சிறிய எண்	தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ள மிகப்பெரிய எண்	தொகுப்பிலுள்ள அனைத்து எண்களும் (ஏறுவரிசையில் எழுதுங்கள்)	தொகுப்பில் எத்தனை எண்கள் உள்ளன?	வெற்றி பெற்றவர்
ஆட்டக்காரர் 1	ஆட்டக்க◌ாரர் 2					

The teacher can also make this table on the board. After all the students finish playing the game a few times, collect some responses from the students and fill in the table. (It is fun to play the game the first few times. However, the teacher should stop the game and start a discussion, when she feels that the students are getting tired or bored of repeating the game.)

இந்த அட்டவணையை ஆசிரியர் கரும்பலகையிலும் வரைந்து கொள்ளலாம். மாணவர்கள் அனைவரும் விளையாடி முடித்த பின்னர், சிலரின் பதில்களை அவர் அட்டவணையில் பதிவிடலாம். (முதல் சில ஆட்டங்கள் சூடு பிடித்து உற்சாகம் தரும் . ஆனால், மாணவர்களுக்கு சலிப்புத் தட்டும்போது ஆட்டத்தை இடையில் நிறுத்திவிட்டு ஆசிரியர் கலந்துரையாட தொடங்கவேண்டும்.)

Please see the section *'Mathematical and pedagogical explanations'* before recording students' responses on the board. Ensure that a sufficient number of examples that help generate some conjectures, are on the board.

மாணவர்களின் பதில்களைப் பலகையில் பதிவிடும் முன்னர், ஆசிரியர் 'கணிதம் மற்றும் கல்வியியல் சார்ந்த விளக்கங்கள்' என்ற பிரிவை வாசிக்கும்படி கேட்டுக்கொள்கிறோம். போதுமான பதில்கள் இருப்பதை உறுதிச் செய்யுங்கள். இது ஊகங்களை உருவாக்கும்போது உதவியளிப்பதாக இருக்கும்.

The teacher can then invite the students to look for patterns in the filled table. Ask the students to generalize the patterns and make conjectures. Write down each conjecture on the board and encourage the students to examine whether it holds, by generating more examples, or can be refuted by generating a counter-example. Help the students see that verifying the conjecture for any number of examples does not amount to a proof, and that one counter-example is sufficient to disprove a conjecture. Encourage the students to come up with proofs of their conjectures.

அட்டவணையில் பதில்களை நிரப்பிய பின்னர் , எண்களில் அமைப்புகளேதும் தென்படுகிறதா என்று மாணவர்களைக் கண்டுபிடிக்கும்படி கூறுங்கள் . அமைப்புகளைப் பொதுவிதிப்படுத்தி அவர்கள் ஊகங்களை உருவாக்க வேண்டும் . ஒவ்வொரு ஊகத்தையும் பலகையில் எழுதுங்கள். அவற்றைச் சரிபார்க்க, மேலும் பல உதாரணங்களை உருவாக்கும்படி மாணவர்களை ஊக்குவியுங்கள் . எதிர்-உதாரணத்தைக் கொண்டு பொய்க்கவும் செய்யலாம். ஊகத்தைப் பொருந்துவதாக எண்ணற்ற உதாரணங்கள் கொடுக்கப்பட்டாலும், அது நிரூபணமாகிவிட்டதற்கு ஈடாகாது என்றும், அதைப் பொய்க்க ஓர் எதிர்-உதாரணம் போதுமானது என்பதையும் மாணவர்களை உணரச் செய்யுங்கள். அவர்கள் சிந்தித்த ஊகத்தை நிரூபிக்க ஊக்குவியுங்கள்.

Some of the conjectures that the students might come up with, and the ways to handle these are discussed in the section '*Mathematical and pedagogical explanations*'. However, it is possible that students come up with conjectures that are not listed here. In this case, take the conjectures one-by-one, verify, refute or prove the conjecture as the case may be, and familiarise the students with these processes.

மாணவர்கள் அளிக்கும் சில ஊகங்கள் மற்றும் அவற்றை எவ்வாறு கையாள வேண்டும் என்பதைக் குறித்து அறிய 'கணிதம் மற்றும் கல்வியியல் சார்ந்த விளக்கங்கள்' என்ற பிரிவை வாசியுங்கள். எனினும், இதில் பட்டியலிடப்படாத ஊகங்களை மாணவர்கள் சிந்திப்பதும் சாத்தியமே. இந்தச் சமயத்தில், ஊகங்களை ஒன்றொன்றாக சரிபார்த்து, அவற்றை நீங்கள் பொய்க்க வேண்டும் அல்லது நிரூபிக்க வேண்டும் . மாணவர்களை இந்தச் செயலில் தேர்ச்சிபெற செய்யுங்கள்.

Task 2: Predict the numbers in the list

செயல் 2: பட்டியலில் உள்ள எண்களைக் கணித்தல்

Let us assume that the following are the initial numbers in the game. Based on these, can you predict the numbers that you will arrive at, while playing the game?

ஆட்டத்தின் தொடக்க எண்கள் வழங்கப்பட்டுள்ள நிலையில், விளையாடும்போது எந்தெந்த எண்களைப் பெறுவீர்கள் என்று உங்களால் கணித்திட முடியுமா?

(**Hint:** If you are stuck, look at the table you just made. See if there is any relationship between the initial numbers and the numbers in the list.)

(**குறிப்பு:** தீர்வு கிடைக்காமல் போனால் அட்டவணையைப் பாருங்கள் . அதிலுள்ள தொடக்க எண்களுக்கும், பட்டியலிடப்பட்ட எண்களுக்கும்

இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என்பதைச் யோசனைச் செய்யுங்கள்)

Predict all the numbers in the list if:

பின்வரும் தொடக்க எண்களுக்கு, முடிவாக கிடைக்ககூடிய எண்களைக் கணித்திடுங்கள்:

1. The initial numbers are 9 and 15.

1. 9 மற்றும் 15

---

2. The initial numbers are 20 and 9.

2. 20 மற்றும் 9

---

3. The initial numbers are 13 and 17.

3. 13 மற்றும் 17

---

4. The initial numbers are 7 and 35.

4. 7 மற்றும் 35

---

5. How did you predict the numbers for each example? Did you notice any patterns across the examples?

5. ஒவ்வொரு எடுத்துக்காட்டிற்கும் எண்களை எவ்வாறு கணித்தீர்கள் ? இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் ஏதேனும் அமைப்பு இருப்பதைக் கவனத்தீர்களா?

> The teacher then can engage students in a discussion on how they can justify that their strategy for finding the numbers in the list will always work. Please study the section `***Mathematical and pedagogical explanations***' for suggestions/ideas on how to lead this discussion.
>
> எண்களைக் கண்டறிய மாணவர்கள் பயன்படுத்தியுள்ள உத்தி தவறாமல் சரியான விடையை அளிக்கும் என்பதை அவர்கள் எவ்வாறு நியாயப்படுத்தலாம்? இதைக் குறித்து ஆசிரியர் ஓர் உரையாடலை நிகழ்த்தலாம். இதை எவ்வாறு எடுத்துச் செல்லலாம் என்பதைக் குறித்த கருத்துகள்/யோசனைகளைப் பெற '**கணிதம் மற்றும் கல்வியியல் சார்ந்த விளக்கங்கள்**' என்ற பிரிவை வாசியுங்கள்.

6. Now that you know the strategy for finding the list, can you predict a strategy that will ensure that one of the players will always win this game? (Which player can adopt this strategy and always win?)

6. எண்களைக் கண்டறியும் உத்தி தற்போது உங்களுக்குத் தெரியும் .

அதேபோல, இரு ஆட்டக்காரர்களில் ஒருவரே எப்போதும் வெற்றி பெறுவதை உறுதிச் செய்வதற்கான ஓர் உத்தியை உங்களால் கணிக்க முடியுமா? (இருவரில் எந்த ஆட்டக்காரர் இந்த உத்தியைப் பயன்படுத்தி எப்போதும் வெற்றி பெறலாம்?)

Mathematical and pedagogical explanations

கணிதம் மற்றும் கல்வியியல் சார்ந்த விளக்கங்கள்

The activity helps the students engage in some fundamental practices of mathematics, such as observing patterns, making conjectures, verifying or refuting the conjectures, and so on. The novelty of the activity is in seeing how mathematical ideas emerge in the context of the game. The game begins with a simple task such as subtraction of two numbers. At the end of one or two games, the student begins to grasp that the process leads to a finite sequence of numbers. Moreover, one starts figuring out that the numbers that emerge in each game depend on the choice of the initial pair of numbers. After looking for patterns, the students will realize the connection between the HCF of the initial pair of numbers with the list of numbers obtained.

இந்த விளையாட்டின் மூலம் மாணவர்கள் சில அடிப்படையான கணித செயல்பாடுகளில் ஈடுபடலாம். எண் அமைப்புகளை உற்றுநோக்குதல், ஊகங்களை உருவாக்குதல், அவற்றை நிரூபித்தல் அல்லது நிராகரித்தல், போன்றவை இவை. ஆட்டத்தின்போது கணித கருத்துகள் எவ்வாறு வெளிப்படுகிறது என்பதை அறிந்து கொள்வதே இந்த விளையாட்டின் தனித்துவமாகும். இரண்டு எண்களைக் கழித்தல் என்ற எளிமையான செயலில் தொடங்கும் மாணவர்கள், சில ஆட்டங்களுக்குப் பின்னர் இச்செயலின் மூலம் முடிவுள்ள ஓர் எண்தொகுப்புக் கணக்கிடப்பட்டிருப்பதை உணர்வார்கள். மேலும், கிடைத்த எண்கள் அனைத்துமே தொடக்கத்தில் தேர்ந்தெடுத்த எண்களைப் பொறுத்துதான் உள்ளது என்பதையும் தெரிந்துகொள்வார்கள். இவ்வெண்களுக்கு அமைப்புகளேதும் உள்ளதா என்பதைக் உற்றுநோக்கும்போது, அவற்றிற்கும் தொடக்க எண்களின் மீ.பொ.வ-க்கும் உள்ள தொடர்பை மாணவர்கள் உணர்ந்துகொள்வார்கள்.

To understand the mathematical significance of the students' responses, we consider below the different ways of thinking that students might exhibit and propose some conjectures that they might come up with. In the pedagogical discussion column, we provide explanations for some of the conjectures, and suggestions to lead the discussion.

மாணவர்களின் பதில்களில் உள்ள கணித கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்ள, அவர்கள் வெளிப்படுத்தக்கூடிய சில சிந்தனை முறைகள் மற்றும் உருவாக்கக்கூடும் ஊகங்களைக் கீழே பட்டியலிட்டுள்ளோம். சில ஊகங்களுக்கு விளக்கங்களும், அவற்றைக் குறித்த உரையாடலை நிகழ்த்த யோசனைகளும் '**கற்பிக்க உதவும் கலந்துரையாடல்கள்**' என்ற கட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

Students' observations	Possible pedagogical discussion
The largest number in the sequence is the same as the largest number in the initial pair of numbers.	• Ask for the reason why the larger initial number remains the largest number in the list till the end. • Explanation: As we are subtracting numbers in consecutive steps within the set of positive integers, the numbers obtained will always be smaller than the largest number in the initial pair of numbers.
The list contains only the multiples of the smallest number in the final list.	• Ask to verify with other examples in the table. • Ask whether they can come up with a counter-example. • Ask for the reason why this is the case.
In the initial pair of numbers, if one of the numbers is a multiple of the other, then the list contains only the multiples of the smaller initial number. E.g.: For the initial numbers, 7 and 35, the sequence obtained contains only multiples of 7.	• Ask to take a few more initial pairs of numbers, where one is a multiple of the other and verify that it works every time. • Look for a counter-example — a set of two numbers which will refute the above conjecture. This is an opportunity to discuss whether not finding a counter-example amounts to a proof of the conjecture.
If the initial numbers are co-prime (i.e., 1 is the only common factor), then the list consists of all the numbers from 1 to the larger number in the initial pair of numbers.	• Ask to take a few more initial pairs of co-prime numbers and verify that it works every time. • Look for a counter-example — a set of two numbers which will refute the above conjecture. This is an opportunity to discuss whether not finding a counter-example amounts to a proof of the conjecture.
If the initial pair of numbers has a common factor, *d*, then the smallest number in the list is *d*.	• Note that students may not consider 1 as a common factor, and therefore while testing this conjecture they might not have co-prime numbers as the initial pair. • Ask to take a few more examples of a similar kind and verify that it works every time. • Ask whether the two numbers in the pair have any other common factor. Ask them whether they want to modify the conjecture. (Note that the conjecture in this particular form is not true. When we start with the initial numbers 12 and 16, 2 is a common factor of both numbers, but

	does not appear in the final list.) • Ask them if there is anything special about the common factor that is the smallest number in the list. • Think about why the smallest number in the list is this particular factor.
If the last three conjectures above have been articulated by the students, encourage them to come up with one conjecture that will include all these three conjectures.	
The smallest number of the sequence is a common factor of the initial two numbers.	• Find out if this includes or contradicts any of the above conjectures. • Refine, verify, or refute the conjecture.
The smallest number of the sequence is the HCF of the initial pair of numbers.	• Find out if this includes or contradicts any of the above conjectures.

மாணவர்களின் ஊகங்கள்	கற்பிக்க உதவும் கலந்துரையாடல்கள்
எண்தொகுப்பில் உள்ள பெரிய எண்ணும், தொடக்க எண்களில் உள்ள பெரிய எண்ணும் ஒன்றாக இருக்கும்.	• எண் தொகுப்பின் இறுதி வரை , தொடக்க எண்ணே ஏன் பெரிய எண்ணாக உள்ளது என்று கேளுங்கள். • விளக்கம்: தொடர்ச்சியாக மிகை எண்களைக் கழிப்பதால், கணக்கிடப்படும் எண்கள் எப்போதும் தொடக்க எண்களை விட சிறியதாகதான் இருக்கும்.
இறுதி எண் தொகுப்பில், மிகச்சிறு எண்ணின் மடங்குகள் மட்டும்தான் இடம்பெற்றிருக்கும்.	• அட்டவணையில் உள்ள மற்ற எடுத்துக்காட்டுகளுடன் சரிபார்க்கும்படி சொல்லுங்கள். • இதற்கான எதிர்-உதாரணங்கள் எதையும் தரமுடியுமா என்று கேளுங்கள். • இவ்வாறு இருப்பதற்கான காரணத்தைக் கூறும்படி கேளுங்கள்.
தொடக்க எண்களிலொன்று மற்றொன்றின் மடங்காக இருக்குமானால், இறுதி எண்தொகுப்பில் சிறிய எண்ணின் மடங்குகள் மட்டும்தான் கிடைக்கும்.	• மேலும் சில தொடக்க எண்சோடிகளை (ஒன்று மற்றொரு எண்ணின் மடங்காக இருப்பதாக) எடுத்துக் கொள்ள சொல்லுங்கள். ஒவ்வொரு எண்சோடியிக்கும் இந்த ஊகத்தைச் சரிபார்க்கும்படி

எடுத்துக்காட்டு: 7 மற்றும் 35 என்ற தொடக்க எண்களுக்கு நாம் பெறக்கூடிய எண்தொகுப்பில், 7-ன் மடங்குகள் மட்டும்தான் இடம்பெற்றிருக்கும்.	சொல்லுங்கள். • இந்த ஊகத்தைப் பொய்க்கக் கூடும் இரு எண்களைச் சிந்தித்து எதிர்-உதாரணங்களை உருவாக்க முயற்சி செய்யுங்கள் . எதிர்-உதாரணம் கிடைக்காமல் போனால் ஊகம் நிரூபிக்கப்பட்டதாக எடுத்துக்கொள்ளலாமா என்பதைக் குறித்து உரையாட தகுந்த தருணமாக இது இருக்கும்.
தொடக்க எண்கள் சார்பகா முழுஎண்களாக (அதாவது, 1-ஐ மட்டுமே பொது வகுஎண்ணாக கொண்ட எண்கள்) இருக்குமானால் இறுதி எண்தொகுப்பில் , 1 முதல் தொடக்க எண்களின் பெரிய எண் வரையில் எல்லா எண்களும் இடம்பெறும்.	• மேலும் சில சார்பகா முழுஎண் சோடிகளைத் தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொரு முறையும் முடிவுகள் எதிர்பார்த்ததைப் போல் உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்க்கும்படி சொல்லுங்கள். • இந்த ஊகத்தைப் பொய்க்கக் கூடும் இரு எண்களைச் சிந்தித்து எதிர்-உதாரணங்களை உருவாக்க முயற்சியுங்கள். எதிர்-உதாரணம் கிடைக்காமல் போனால் ஊகம் நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டதாக எடுத்துக்கொள்ளலாமா என்பதைக் குறித்து உரையாட தகுந்த தருணமாக இது இருக்கும். • **குறிப்பு**: பொது வகுஎண்ணாக 1 இருப்பதை மாணவர்கள் கருதாமல் போகலாம். ஆதலால் அவர்கள் தேர்ந்தெடுக்கும் தொடக்க எண்கள் சார்பகா முழுஎண்களாக இல்லாமல் போகக்கூடும்.
தொடக்க எண்களுக்கு *d* என்ற பொது வகுஎண் இருக்குமானால் , இறுதி எண்தொப்பில் *d* மிகச்சிறிய எண்ணாக இருக்கும்.	• இது போன்ற வேறு சில எண்களைத் தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொரு முறையும் முடிவுகள் எதிர்பார்த்ததைப் போல் உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்க்கும்படி சொல்லுங்கள். • தொடக்க எண்சோடியிற்கு வேறேதும் பொது வகுஎண் உள்ளதா என்று மாணவர்களிடம் கேள்வி எழுப்பலாம். ஊகத்தை

<table>
<tr><td></td><td>மாற்றியமைக்க யாருக்கும் விருப்பமுள்ளதா என்றும் கேளுங்கள். (குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் வடிவத்தில் ஊகம் தவறானது. எடுத்துக்காட்டாக, 12 மற்றும் 16-ஐ தொடக்க எண்களாக எடுத்துக்கொண்டால், 2 அவற்றினுடைய பொது வகுஎண்ணாக இருக்கும். ஆனால் இறுதி எண்தொகுப்பில் அது இடம்பெறவில்லை.)
• எண்தொகுப்பில் இடம்பெற்றிருக்கும் மிகச்சிறு எண்ணான வகுஎண் ஏதேனும் சிறப்பம்சத்தைக் கொண்டுள்ளதா என்று மாணவர்களிடம் கேளுங்கள்.
• குறிப்பிட்ட எண் மிகச்சிறு எண்ணாக ஏன் இருக்கிறது என்பதைச் சிந்திக்கும்படி சொல்லுங்கள்.</td></tr>
<tr><td colspan="2">மேலுள்ள கடைசி மூன்று ஊகங்களையும் மாணவர்கள் கண்டுபிடித்துவிட்டார்கள் என்றால், இவற்றை உள்ளடக்கிய ஓர் ஊகத்தைச் சிந்திக்கும்படி அவர்களை ஊக்குவியுங்கள்.</td></tr>
<tr><td>எண்தொகுப்பில் இடம் பெறும் மிகச்சிறு எண் தொடக்க எண்சோடியின் பொது வகுஎண்ணாகும்.</td><td>• மேலே விவரிக்கப்பட்ட ஊகங்கள் ஏதேனும் இதில் உள்ளடங்கியதா அல்லது அவற்றிலிருந்து முரண்படுகிறதா என்பதைப் பாருங்கள்.
• ஊகத்தை மறுஆக்கம் செய்யலாம், நிரூபிக்கலாம், அல்லது தவறென காட்டலாம்.</td></tr>
<tr><td>எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறு எண்தான் தொடக்க எண்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.</td><td>• மேலே விவரிக்கப்பட்ட ஊகங்கள் ஏதேனும் இதில் உள்ளடங்கியதா அல்லது அவற்றிலிருந்து முரண்படுகிறதா என்பதைப் பாருங்கள்.</td></tr>
</table>

Note: When students come up with observations and conjectures, these may not be articulated clearly enough. The teacher may need to rephrase, and ask clarifying questions to make the conjectures precise. There cannot be a standard instruction for this, and the teacher will have to think of ways of clarifying. Once a conjecture is formed, ask the students to verify, refute, or refine it. The next step is to think of a proof.

குறிப்பு: மாணவர்கள் உற்றுகவனித்தவை மற்றும் அவர்கள் சிந்தித்த ஊகங்களைக் கூறும்போது அவைத் தெளிவில்லாமல் இருக்கலாம். அவற்றைச் சரிசெய்ய புதுவிதங்களில் விளக்கமளித்து, தெளிவுபடுத்தக் கூடிய கேள்விகளை அவர்களிடம் ஆசிரியர்கள் கேட்க வேண்டும். இதைச் செய்ய பொதுவான ஒரு வழி இருக்க வாய்ப்பில்லை. தங்களுக்கென புது வழிகளைச் சிந்தித்து ஆசிரியர்கள் மாணவர்களைத் தெளிவுபடுத்த வேண்டும். ஓர் ஊகம் முன்வைக்கப்பட்ட பின் அதை நிரூபிக்க, பொய்க்க, அல்லது மறுஆக்கம் செய்யும்படி மாணவர்களிடம் கூறுங்கள். அடுத்தக்கட்டமாக, நிரூபணங்களைக் குறித்துப் பார்க்கலாம்.

Task 3: Looking for proofs of some conjectures

செயல் 3: சில ஊகங்களை நிரூபிக்க முயற்சித்தல்

Some students made these interesting observations after playing a few rounds of the game:

சில ஆட்டங்களுக்குப் பின், மாணவர்கள் சிலர் கவனித்த சுவாரஸ்யமான ஊகங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

Observation 1: The smallest number in the final list is the HCF of the initial pair of numbers.

ஊகம் 1: இறுதி எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறிய எண்தான் தொடக்க எண்களின் மீ.பொ.வ ஆகும்.

Observation 2: All and only the multiples of this smallest number up to the largest number appear in the list.

ஊகம் 2: பெரிய எண் வரையில் உள்ள இந்த மிகச்சிறு எண்ணின் அனைத்து மடங்குகள் மட்டுமே எண்தொகுப்பில் இடம்பெறும்.

1. Can you figure out why this happens for every pair of numbers?

1. அனைத்து எண்சோடிகளிலும் இவ்வாறு ஏன் நிகழ்கிறது என்பதை உங்களால் கூற முடியுமா?

Let us look at the two observations.

இரண்டு ஊகங்களையும் தனிதனியே இப்போது பார்க்கலாம்.

- Observation 1 says the following:
  a) The smallest number in the list divides both the initial numbers.
  b) The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.
- ஊகம் 1-ன் படி
  a) எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறு எண் தொடக்க எண்கள் இரண்டையுமே வகுக்கும்.
  b) எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறு எண் ஏதோ ஒரு பொது வகுஎண்ணாக மட்டும் இருப்பதில்லை, இரு தொடக்க எண்களின்

மீ.பொ.வ ஆகவும் உள்ளது.

- Observation 2 implies the following:
    a) All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list,
    b) All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.
- ஊகம் 2-ன் படி
    a) எண்தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ள அனைத்து எண்களும் அதிலுள்ள மிகச்சிறு எண்ணின் மடங்குகளாக இருக்கும்.
    b) மிகப்பெரிய எண் வரையில் உள்ள மிகச்சிறு எண்ணின் மடங்குகள் அனைத்தும் எண்தொகுப்பில் இடம்பெறும்.

2. We need to prove or justify these observations. Can you think of the ways of doing this?

2. இந்த ஊகங்களை நிரூபிக்க அல்லது சரிபார்க்க வேண்டும் . இதைச் செய்திடும் வழிகளைக் கண்டுபிடிக்க உங்களால் முடியுமா?

The teacher could use the reasoning given below to guide the discussion with the students and to help them arrive at a proof .

இவை இரண்டும் கீழே ஆராயப்பட்டுள்ளது . இதைப் பயன்படுத்தி ஓர் உரையாடலை வழிநடத்தி ஊகங்களை நிரூபிக்க மாணவர்களுக்கு உதவலாம்.

Observation 1a: The smallest number in the list divides both the initial numbers.

ஊகம் 1a: எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறு எண் , தொடக்க எண்கள் இரண்டையுமே வகுக்கும்.

Proof for Observation 1a: For positive numbers, whenever we subtract a number A from another (larger) number B, the result is less than B. Given that we start with two initial numbers, and form subsequent numbers by subtracting the smaller from the larger, all the numbers will be smaller than the largest number in the initial pair.

ஊகம் 1a-இன் நிரூபணம்: மிகை எண்களைப் பொருத்தவரை, A என்ற ஓர் எண்ணை, B என்ற இன்னொரு (பெரிதான) எண்ணிலிருந்து கழித்தால் B-ஐ விட சிறிய எண்தான் கிடைக்கும். இரண்டு தொடக்க எண்களை எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றில் பெரிதான எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்து எண்களைப் பெறுவதாக ஆட்டம் செல்கிறது. இதனால், தொடக்க எண்சோடியிலுள்ள பெரிய எண்ணை விட அனைத்து எண்களும் சிறியதாக இருக்கும்.

Since we are not allowing negative numbers, the game *has* to stop at some stage. So there exists a smallest number in the list, which may be 1 or a number greater than 1.

நாம் குறை எண்களை அனுமதிக்காததால், ஏதோ ஒரு கட்டத்தில் ஆட்டம் முடிவு பெற்றுதான் ஆக வேண்டும் . ஆதலால், எண்தொகுப்பில் ஒரு மிகச்சிறிய எண் இருக்கவேண்டும். அது 1 அல்லது அதைவிட பெரிய

எண்ணாக இருக்கலாம்.

Let us call this the smallest number *s*. If we call the initial numbers as A and B, A being the larger of the two numbers, observation 1a claims that *s* divides A and *s* divides B.

இந்தச் சிறிய எண்ணை *s* என்று எடுத்துகொள்வோம் . தொடக்க எண்களை A, B என்று எடுத்துக்கொண்டு , பெரிய எண்ணை A என்று கருதிக்கொள்வோம். ஊகம் 1(i)-இன் படி எண்கள் A மற்றும் B-ஐ, *s* வகுக்கும்.

Let us first prove that *s* divides B.

முதலில், B-ஐ *s* வகுக்கும் என்று நிரூபிப்போம்.

Let assume *s* does not divide B.

எண் B-ஐ *s* வகுக்காது என்று எடுத்துக்கொண்டு தொடங்கலாம்.

Then B = *ns + k* with *k < s* ------ By applying the division algorithm with *k* as the remainder.

ஆதலால், B = *ns* + *k* மற்றும், *k* < *s* ---- இது வகுத்தல் வழிமுறையை பயன்படுத்துவதன் மூலம் பெறப்பட்டது. இதில், *k* மிச்சமாகும்.

But *s* belongs to the list. So B – *ns* will also belong to the list --- we get this by subtracting *s* "*n* times" from B.

எண்தொகுப்பில் *s* இடம்பெற்றுள்ளது. ஆதலால் B – *ns* என்ற எண்ணும் இடம்பெற்றிருக்கும் ---- எண் B-யிலிருந்து '*n* முறைகள்' *s*-ஐ கழித்ததால் அதைப் பெறுகிறோம்.

So B – *ns* = *k* also belongs to the list, but *k* < *s* and *s* is the smallest number in the list.

ஆதலால், B – *ns* = *k* எண்தொகுப்பில் இடம்பெறும். ஆனால் *k* < *s*. மேலும், *s* தான் எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறிய எண்.

That means our assumption that *s* does not divide B was wrong so, *s* divides B.

இதன் மூலம், எண் *B*-ஐ *s* வகுக்காது என்று நாம் எடுத்துக்கொண்டது தவறென தெரிகிறது.

Similarly, we can show that *s* divides A as well.

ஆதலால், எண் B-ஐ *s* வகுக்கும். இதேபோல், எண் A-ஐ *s* வகுக்கும் என்பதையும் நிரூபிக்கலாம்.

So *s* is a common factor of A and B.

முடிவாக, எண்கள் A மற்றும் B-யின் பொது வகுஎண்ணாக *s* உள்ளது.

Observation 1b: The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.

ஊகம் 1b: எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறு எண் ஏதோ ஒரு பொது வகுஎண்ணாக இருப்பதில்லை, இரு தொடக்க எண்களின் மீ.பொ.வ ஆக உள்ளது.

Proof for Observation 1b:

ஊகம் 1b-இன் நிரூபணம்:

Let us prove a statement before we proceed with the proof of Observation 1b.

ஊகம் 1b-ஐ குறித்துப் பார்க்கும் முன்பு ஒரு கூற்றின் நிரூபணத்தைப் பார்க்கலாம்.

Statement (I) : A common factor of two numbers also divides their difference.

கூற்று (I): இரண்டு எண்களின் பொது வகுஎண் அவற்றின் வித்தியாசத்தையும் வகுக்கும்.

i.e. If q divides C and D and $C > D$, then q divides $C - D$.

அதாவது, q ஆனது எண்கள் C மற்றும் D-ஐ வகுக்கும் என்றும், C > D என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் 'C – D'-ஐயும் q வகுக்கும்.

Proof of Statement (I): q divides C and D would mean,

கூற்று (I)-இன் நிரூபணம்:

q ஆனது C மற்றும் D-ஐ வகுக்குமென்றால்,

Let, $C=rq$ and $D=tq$ for some integers r and $t>0$

$C=rq$ மற்றும் $D=tq$ (r மற்றும் $t > 0$ என்ற சில முழுக்களுக்கு) என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

So, $C-D=rq-tq=(r-t)\times q$

ஆதலால், $C-D=rq-tq=(r-t)\times q$

So, q divides $C - D$ and hence is a common factor of the difference between C and D.

முடிவாக, எண் 'C – D'-ஐ q வகுக்கிறது. ஆதலால், C மற்றும் D-இன் வித்தியாசத்தின் பொது வகுஎண்ணாக q உள்ளது.

Coming back to observation 1b

ஊகம் 1b -ஐ திரும்ப பார்த்தல்

Thus, if we start with two initial numbers and q is a common factor of both, it is also a common factor of their difference. This ensures that is q is a common factor of all the three numbers in the list after the first step of the game. At every subsequent step, a pair of numbers is taken from the list and the difference written down as a new number. Thus if q is a common factor of the existing pair of numbers, it is also a factor of the new number. This ensures that if a number is a common factor of the initial numbers A and B, it is a factor of all the numbers in the list, including s. That is, any common factor of A and B, divides s.

ஆதலால், இரண்டு தொடக்க எண்களுக்கும் பொது வகுஎண்ணாக இருக்கும் q அவ்வெண்களின் வித்தியாசத்திற்கும் வகுஎண்ணாக இருக்கும். ஆட்டத்தின் முதற்கட்டம் முடிந்த பின்னர், எண்தொகுப்பில் உள்ள மூன்று எண்களுக்கும் q பொது வகுஎண்ணாக இருப்பது உறுதியாகியுள்ளது. அடுத்தடுத்த கட்டத்தில், எண்தொகுப்பில் இரு புது எண்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதனுடைய வித்தியாசம் எழுதப்படுகிறது. ஆதலால், எண்தொகுப்பில் உள்ள எண்களின்

பொதுவகுஎண்ணாக q இருக்குமானால் புதிதாக கிடைக்கும் எண்ணிற்கும் அது வகுஎண்ணாகதான் இருக்கும். முடிவாக, A மற்றும் B என்ற இரு தொடக்க எண்களின் பொது வகுஎண்ணாக ஓர் எண் இருக்குமானால், ஆட்டத்தில் கணக்கிடப்படும் எண்தொகுப்பில் உள்ள அனைத்து எண்களின் வகுஎண்ணாகவும் அது இருக்கும் . அதாவது, எண்கள் A மற்றும் B-இன் எந்த ஒரு பொது வகுஎண்ணும், s-ஐ வகுக்கும்.

So, if the HCF of the initial numbers A and B is d, then d divides s and $d \le s$. However, we know that s also is a factor of A and B (Observation 1a). Hence $s \le d$. Therefore, we have $s = d$.

ஆதலால், தொடக்க எண்கள் A மற்றும் B-ற்கு மீ.பொ.வ d என்றால் அது s-ஐ வகுக்கும். மேலும், $d \le s$.

ஆனால், எண்கள் A மற்றும் B-இன் வகுஎண்ணாகவும் s உள்ளது என்பதை நாம் அறிவோம். (ஊகம் 1(i)). ஆதலால், $s \le d$.

ஆகையால், $s = d$ என்று பெறுகிறோம்.

Observation 2a: All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.

ஊகம் 2a: மிகப்பெரிய எண் வரையில் உள்ள மிகச்சிறு எண்ணின் மடங்குகள் அனைத்தும் எண்தொகுப்பில் இடம்பெறும்.

Proof for Observation 2a: s belongs to the list, and A is a multiple of s.

ஊகம் 2(i)-இன் நிரூபணம்: எண் தொகுப்பில் s இடம்பெற்றுள்ளது மற்றும் எண் A, s-இன் மடங்காகும்.

So, $A = fs$

ஆதலால், $A = fs$

Now s and $A = fs$ are both already in the list.

இப்போது, s மற்றும் $A = fs$ எண் தொகுப்பில் ஏற்கனவே இடம்பெற்றுள்ளது.

So, $fs - s = (f - 1)s$ is also in the list.

அதனால், $fs - s = (f - 1)s$ என்ற எண்ணும் தொகுப்பில் இடம்பெற்றிருக்கும்.

Similarly, $(f - 1)s - s = (f - 2)s$ is also in the list.

அதேபோல, $(f - 1)s - s = (f - 2)s$-*உம்* உள்ளது.

Continuing like this we can see that,

$(f - 1)s, (f - 2)s, (f - 3)s, \ldots, 3s, 2s$ also belong to the list.

இதை தொடர்ந்து செய்தோமானால்,

$(f - 1)s, (f - 2)s, (f - 3)s, \ldots, 3s, 2s$ என அனைத்து எண்களும் எண் தொகுப்பில் உள்ளது .

Observation 2b: All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list

ஊகம் 2b: எண்தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ள அனைத்து எண்களும் அதிலுள்ள மிகச்சிறு எண்ணின் மடங்குகளாக இருக்கும்.

Proof for Observation 2b:

ஊகம் 2b-இன் நிரூபணம்:

Using the same argument used in the proof of Observation 1a, we get that the smallest number, *s* divides any number in the list.

ஊகம் 1a-ல் பயன்படுத்தியுள்ள அதே வாதத்தைப் பயன்படுத்தினால், எண் தொகுப்பிலுள்ள எந்த ஓர் எண்ணையும் மிகச்சிறு எண்ணான *s* வகுக்கும் என நமக்குத் தெரிகிறது.

Relation to the Euclidean algorithm

யூக்ளிடியப் படிமுறைத்தீர்வுடன் உள்ள தொடர்பு:

Imagine you change the rules of the game:

ஆட்டத்தின் விதிகளை மாற்றினோமானால் என்ன நடக்கும் என்பதைப் பார்க்கலாம்:

Instead of subtracting the smaller number from the largest, you could subtract a *multiple* of the smaller number from the larger. And then in the next step do the same with the multiple used and the number remaining after the subtraction. Then that is the Euclidean algorithm for you! So, can you see why the game and therefore the Euclidean algorithm works?

பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழிப்பதற்கு பதிலாக, நீங்கள் சிறிய எண்ணின் மடங்கைக் கொண்டு பெரிய எண்ணைக் கழித்தும் பார்க்கலாம். அடுத்ததாக, கழித்தலில் பெற்ற எண் மற்றும் பயன்படுத்திய மடங்கை வைத்து இதையே மீண்டும் செய்யுங்கள் . இதுதான் யூக்ளிடியப் படிமுறைத்தீர்வின் சிறப்பாகும்! இப்போது உங்களுக்குத் தெரிந்திருக்கும் யூக்ளிடியப் படிமுறைத்தீர்வு மற்றும் இந்த விளையாட்டு எவ்வாறு சாத்தியமாகிறதென்று.

Points to ponder

சிந்திக்க வேண்டியவை

1) Do all pairs of numbers allow for a winning strategy? If not, what kinds of numbers will allow for a winning strategy?

1) அனைத்து எண்சோடிகளும் வெற்றி பெறக்கூடிய உத்தியை அனுமதிக்குமா? இல்லையென்றால், எவ்வாறான எண்கள் வெற்றிபெறும் உத்தியை அனுமதிக்கும்?

2) What happens if you allow for the first three numbers to be random? Say, by making it a three-player game?

2) முதல் மூன்று எண்கள் தற்போக்காக தேர்ந்தெடுக்க அனுமதிக்கப்பட்டால் என்னவாகும்? அதாவது, மூவர் விளையாடும் ஆட்டமாக மாற்றியமைப்பது எவ்வாறிருக்கும்?

Terms to discuss

கலந்தாலோசிக்க வேண்டிய அருஞ்சொற்கள்

Process of mathematics, conjecture, counter example, reporting a conjecture, etc.

கணித வழிமுறை, ஊகங்கள், எதிர்-உதாரணங்கள், ஓர் ஊகத்தை அறிவித்தல் போன்றவை.

Suggested Readings

பயனுள்ள நூல்கள்

Euclid's Algorithm I: https://nrich.maths.org/1357/index

Euclid's Algorithm II: https://nrich.maths.org/1728

Euclid's Algorithm III: https://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml

References

மேற்கோள்கள்

- Euclid's Game: https://www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml
- The optimal strategy in Euclid's game. https://math.stackexchange.com/questions/754461/optimal-strategy-in-euclids-game