

Euclid's Game

युक्लिडचे खेळ

Overview

प्रास्ताविक

Here is a game that is based on the Euclidean algorithm to find the highest common factor of two natural numbers. In this game, students not only play the game making moves that correspond to steps of the Euclidean algorithm, but also engage in doing mathematics by making conjectures, giving counter-examples, refuting conjectures, and proving the results.

दोन नैसर्गिक संख्यांचा मसावि काढण्यासाठीच्या युक्लिड रीतीवर (कार्यावलीवर) हा खेळ आधारलेला आहे. या खेळात, विद्यार्थी युक्लिडची रीत वापरून केवळ खेळत नाहीत, तर गणित शिकण्याच्या प्रक्रिया जसे अनुमान (conjecture) लावणे, प्रति-उदाहरण (counter example) देणे, अनुमान चुकीचा ठरविणे आणि निष्कर्ष सिद्ध करणे इत्यादी कौशल्येदेखील आत्मसात करतात.

An important idea is that we need to look for counter-examples to find out that a statement is not true. As a part of this unit, you should talk to the students and try to differentiate between a true prediction and a mathematical result. Also discuss how in the case of establishing the correctness of a mathematical result, giving examples is not enough; while in the case of proving a result wrong, counter-examples are enough.

महत्त्वाची बाब ही की आपल्याला 'एखादे विधान खरे नाही' हे पडताळण्यासाठी प्रति-उदाहरण शोधावे लागते. या अध्ययन घटकाचा भाग म्हणून आपल्याला विद्यार्थ्यांशी चर्चा करावी लागेल आणि 'बरोबर अंदाज' आणि 'गणिती विधान' यातील फरक विद्यार्थ्यांना स्पष्ट करावा लागेल. तसेच गणिती विधानाची सत्यता तपासताना फक्त उदाहरणे देणे पुरेसे नसते; एखादे विधान चुकीचे ठरवताना केवळ एक प्रति-उदाहरण देणेही पुरेसे ठरते, याची चर्चा करावी लागेल.

Minimum Time Required: Three sessions of 40 minutes each

अपेक्षित किमान वेळ: 40 मिनिटांच्या तीन तासिका

Type of Learning Unit: Classroom-based

अध्ययन घटकाचे स्वरूप: वर्गामध्ये करावयाचे अध्ययन घटक

Unit-specific objectives

अध्ययन घटकाची उद्दिष्टे

- To observe patterns in numbers and articulate the observed pattern clearly
संख्यांमधील आकृतिबंध पाहणे आणि आढळलेला आकृतिबंध स्पष्ट शब्दात मांडणे
- To look for counter-examples to refute a conjecture
अनुमान नाकारण्यासाठी प्रति-उदाहरण शोधणे
- To understand that examples are not sufficient to prove a conjecture
अनुमान सिद्ध करण्यासाठी उदाहरणे पुरेशी नाहीत, हे समजून घेणे
- To understand that just one counter-example is sufficient to disprove a conjecture
अनुमान नाकारण्यासाठी केवळ एक प्रति-उदाहरण पुरेसे असते, हे समजून घेणे

- To come up with a logical argument (i.e. a proof) in support of a conjecture
अनुमानाला पुष्टी मिळेल, असा तार्किक युक्तिवाद करणे
- To understand the relation between taking successive differences and the Euclidean algorithm to find the highest common factor (HCF) of two numbers
दोन संख्यांतील मसावि काढण्यासाठी क्रमवर्ती वजाबाकी आणि युक्लिडची रीत यातील संबंध समजून घेणे

Links to Curriculum

अभ्यासक्रमाशी दुवे

NCERT Maths Class 6: The concepts of factors, relatively prime (co-prime) numbers and multiples (Chapter 3)

NCERT Maths Class 6: The concept of Highest Common Factor (HCF) (Chapter 3)

NCERT Maths Class 10: Euclid's Lemma (Chapter 1)

Introduction

ओळख

Playing games is a lot of fun. Today you are going to play a game that involves numbers, and you will find a way to win the game, always!

आपल्याला खेळताना खूप मजा येते. आज आपण असा खेळ खेळणार आहोत, जो नेहमी जिंकण्यासाठी तुम्ही मार्ग शोधाल!

Materials Required : Blackboard, chalk and sheets of paper

साहित्य: फळा, खडू, कागद

Task 1: Play the Euclid's game

कृती 1: खेळ युक्लिडचा खेळ

- This is a two-player game.
या खेळात दोन विद्यार्थी भाग घेऊ शकतात.
- The rules of the game are as follows.
खेळाचे नियम पुढीलप्रमाणे आहेत.
 - You can decide who plays first. The first player, say Player 1, writes down a number that is between 1 and 100, including both. Let us call this number 'A'. The second player, say Player 2, can write down another number of his/her choice. Let's call this number 'B'.
खेळाला सुरुवात प्रथम कोण करणार, हे तुम्ही ठरवू शकता. यात खेळाडू-1 ने 1 ते 100 पैकी कोणतीही एक नैसर्गिक संख्या लिहायची आहे. या संख्येला आपण 'A' म्हणू. यानंतर खेळाडू-2 त्याच्या आवडीची 1 ते 100 पैकी दुसरी कोणतीही संख्या लिहील. या संख्येला आपण 'B' म्हणू.
 - Now, the first player will write the number $(A - B)$ or $(B - A)$, whichever is positive. Let's call this number 'C'.
आता विद्यार्थी-1 $(A - B)$ किंवा $(B - A)$ अशा रीतीने वजाबाकी करेल, ज्यामुळे उत्तर 'धन' संख्या येईल. उत्तरादाखल मिळालेल्या संख्येला आपण 'C' म्हणू.
 - Next, it is the second player's turn. He/she has a choice. He/She can either write the difference between C and A or the difference between C and B. However, if one of these differences is already in the list (i.e., if it is A or B or C) then it cannot be written again. (All differences are taken to be positive.)

आता विद्यार्थिनी खेळेल. तिच्याकडे काही पर्याय आहेत. ती 'C' आणि 'A' यांची वजाबाकी करू शकते किंवा 'C' आणि 'B' यांची वजाबाकी करू शकते. मात्र आलेले उत्तर यादीत असल्यास (जर A, B किंवा C), विद्यार्थिनी ती संख्या पुन्हा लिहू शकणार नाही (सर्व उत्तरे धन असायला हवीत, हे लक्षात ठेवा).

- IV. Similarly, in subsequent turns, the players take turns to write a number which is the difference between any two numbers in the list, provided the number itself is not already present in the list.

खेळ असाच पुढे चालू ठेवताना खेळाडू आळीपाळीने यादीतील कोणत्याही दोन संख्यांची वजाबाकी करून मिळालेली धन संख्या लिहीतील. मात्र ती संख्या यादीमध्ये आधीपासूनच नाही, हे विद्यार्थी पाहतील.

- V. The game ends when it is not possible to write any new number.

जेव्हा कोणतीही नवीन संख्या लिहीणे शक्य नसेल, तेव्हा हा खेळ संपेल.

- VI. The person who writes the last number will be the winner.

जी खेळाडू शेवटची संख्या लिहील, ती खेळ जिंकेल.

Let us look at a sample run of the game.

आता आपण हा खेळ एकदा खेळून पाहू.

- Suppose, the first player writes 12. The second player has 99 choices to choose his/her number (as the upper limit is 100).

समजा, खेळाडू-1 ने 12 ही संख्या लिहीली, तर खेळाडू-2 ही उरलेल्या 99 संख्यांमधून संख्या निवडू शकते.

- Suppose, the second player chooses 16, then the first player can only write 4, i.e. the difference between 16 and 12.

समजा खेळाडू-2 ने 16 ही संख्या निवडली, तर खेळाडू-1 ही 4 ही संख्या लिहील, कारण 16 आणि 12 यांची वजाबाकी 4 येते.

- The second player then writes 8, the difference between 12 and 4. Note that the player could not have written the difference between 16 and 4, as 12 is already in the list.

त्यानंतर खेळाडू-2 ही 8 ही संख्या लिहील. कारण 12 आणि 4 यांची वजाबाकी केल्यास 8 उत्तर येते. लक्षात घ्या, खेळाडू-2 ने 16 आणि 4 यांच्या वजाबाकीतून येणारी 12 ही संख्या लिहीलेली नाही, कारण 12 ही संख्या आधीपासूनच यादीत आहे.

- Now there is no possibility of writing new numbers, so the game ends with the numbers 4, 8, 12, and 16 appearing in the list (12, 16, 4, 8 in the order of appearance).

आता, येथे कोणत्याही नवीन संख्येची शक्यता दिसत नाही. त्यामुळे हा खेळ 4, 8, 12, 16 या संख्यांबरोबर संपेल (यादीत 12, 16, 4, 8 या क्रमाने संख्या येतात).

- There are four numbers in the list, and the second player is the winner, as he/she wrote the last number 8.

वरील यादीत चार संख्या आहेत आणि खेळाडू-2 ने हा खेळ जिंकलेला आहे. कारण शेवटची 8 ही संख्या तिने लिहीली आहे.

Play this game with your partner multiple times. Study the lists of numbers that you got for each game and record your observations in the table below. For the last column, where you record the winner, mention whether Player 1 (who chose the first number) won or Player 2 (who chose the second number) won.

तुमच्या वर्गमित्रांबरोबर हा खेळ पुन्हापुन्हा खेळा. प्रत्येक वेळी खेळताना तयार झालेल्या यादीचा अभ्यास करा आणि तुमची निरीक्षणे पुढील तक्त्यात लिहा. शेवटच्या रकान्यात जेथे तुम्ही विजेत्याचे नाव लिहाल, तेथे खेळाडू-1 (ज्याने पहिली संख्या निवडली) जिंकला किंवा खेळाडू-2 (ज्याने दुसऱ्यांदा संख्या निवडली) जिंकला, ते लिहा.

Initial Numbers		The smallest number in the list	The largest number in the list	All the numbers in the list (in ascending order)	How many numbers are there in the list?	Winner
सुरुवातीच्या संख्या		यादीतील सर्वात लहान संख्या	यादीतील सर्वात मोठी संख्या	यादीतील सर्व संख्या (चढत्या क्रमाने)	यादीत एकूण किती संख्या आहेत?	विजेता
Player 1 खेळाडू-1	Player 2 खेळाडू-2					

The teacher can also make this table on the board. After all the students finish playing the game a few times, collect some responses from the students and fill in the table (It is fun to play the game the first few times. However, the teacher should stop the game and start a discussion, when she feels that the students are getting tired or bored of repeating the game).

शिक्षक फळ्यावर तक्ता लिहू शकतात. सर्व विद्यार्थ्यांनी वरील खेळ काही वेळा खेळल्यानंतर, काही विद्यार्थ्यांकडून उत्तरे मिळवा आणि फळ्यावरच्या तक्त्यात भरा (सुरुवातीला काही वेळा खेळताना मजा येते. जेव्हा विद्यार्थी पुन्हापुन्हा खेळून दमले आहेत किंवा कंटाळले आहेत असे वाटेल, तेव्हा शिक्षकांनी खेळ थांबवून चर्चा करणे अपेक्षित आहे).

Please see the section '*Mathematical and pedagogical explanations*' before recording students' responses on the board. Ensure that a sufficient number of examples that help generate some conjectures, are on the board.

विद्यार्थ्यांनी दिलेली उत्तरे तक्त्यात भरण्याआधी कृपया गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे (**Mathematical and Pedagogical explanations**) हा भाग वाचावा. विद्यार्थ्यांना काही अनुमाने सुचण्यासाठी फळ्यावरील उदाहरणांची संख्या पुरेशी आहेत ना, याची खात्री करा.

The teacher can then invite the students to look for patterns in the filled table. Ask the students to generalize the patterns and make conjectures. Write down each conjecture on the board and encourage the students to examine whether it holds, by generating more examples, or can be refuted by generating a counter-example. Help the students see that verifying the conjecture for any number of examples does not amount to a proof, and that one counter-example is sufficient to disprove a conjecture. Encourage the students to come up with proofs of their conjectures.

फळ्यावरील तक्त्यात भरलेल्या माहितीमध्ये काही आकृतिबंध दिसतो का, हे शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना विचारावे, आणि या आकृतिबंधाचे सामान्यीकरण करून अनुमान मांडायला सांगावे. प्रत्येक अनुमान फळ्यावर लिहा आणि अजून उदाहरणे घेऊन विद्यार्थ्यांना त्याची सत्यता तपासायला सांगा किंवा प्रति-उदाहरण देऊन ते नाकारता येईल का, हे विचारा. एखाद्या अनुमानाची सत्यता तपासताना कितीही उदाहरणे दिली तरी ते सिद्ध होत नाही, परंतु अनुमान नाकारायला केवळ एकच प्रति-उदाहरण पुरेसे असते, हे विद्यार्थ्यांना पटण्यासाठी शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना मदत करणे, गरजेचे आहे. विद्यार्थ्यांना त्यांची अनुमाने सिद्ध करण्यासाठी प्रोत्साहित करा.

Some of the conjectures that the students might come up with, and the ways to handle these are dis-

cussed in the section '*Mathematical and pedagogical explanations*'. However, it is possible that students come up with conjectures that are not listed here. In this case, take the conjectures one-by-one, verify, refute or prove the conjecture as the case may be, and familiarise the students with these processes.

विद्यार्थी अनुमान कसे मांडतात आणि अनुमानांना कसे हाताळतात हे गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे या भागात सांगितले आहे. मात्र विद्यार्थी अशीही अनुमाने मांडू शकतात, जी यादीत नाहीत. अशा वेळी एकेक अनुमान घ्या, त्याची सत्यता पडताळून बघा, नाकारा किंवा सिद्ध करा. अशा प्रक्रियांबद्दल विद्यार्थ्यांशी चर्चा करा.

Task 2: Predict the numbers in the list

कृती 2: यादीतील संख्यांचा अंदाज बांधणे

Let us assume that the following are the initial numbers in the game. Based on these, can you predict the numbers that you will arrive at, while playing the game?

समजा खेळामध्ये सुरुवातीच्या संख्या पुढीलप्रमाणे आहेत. या संख्यांपासून खेळ खेळल्यास तुमच्या यादीत कोणत्या संख्या येतील, याचा अंदाज तुम्हाला बांधता येईल का?

(**Hint:** If you are stuck, look at the table you just made. See if there is any relationship between the initial numbers and the numbers in the list.)

(**सूचना:** खेळ खेळताना अडल्यास तुम्ही बनवलेला तक्ता पहा. सुरुवातीच्या संख्या आणि यादीतील संख्या यांच्यात काही संबंध आहे का, ते पहा).

Predict all the numbers in the list if:

सूचीतील सर्व संख्यांचा अंदाज लावा जर:

1. The initial numbers are 9 and 15.

सुरुवातीच्या संख्या 9 आणि 15 असल्यास.

3. The initial numbers are 20 and 9.

सुरुवातीच्या संख्या 20 आणि 9 असल्यास.

4. The initial numbers are 13 and 17.

सुरुवातीच्या संख्या 13 आणि 17 असल्यास.

5. The initial numbers are 7 and 35.

सुरुवातीच्या संख्या 7 आणि 35 असल्यास.

6. How did you predict the numbers for each example? Did you notice any patterns across the examples?

प्रत्येक उदाहरणासाठी कोणत्या संख्या येतील, याचा तुम्ही अंदाज कसा बांधला? या उदाहरणांमध्ये तुम्हाला काही आकृतिबंध दिसले का?

The teacher then can engage students in a discussion on how they can justify that their strategy for finding the numbers in the list will always work. Please study the section '*Mathematical and pedagogical explanations*' for suggestions/ideas on how to lead this discussion.

यानंतर शिक्षक यादीतील संख्या शोधताना विद्यार्थ्यांनी कोणते धोरण वापरले, या मुद्यावर चर्चा करू शकतात. चर्चेसाठी काही कल्पना गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे मध्ये दिलेल्या आहेत. कृपया त्यांचा अभ्यास करा.

7. Now that you know the strategy for finding the list, can you predict a strategy that will ensure that one of the players will always win this game? (Which player can adopt this strategy and always win?)

आता, यादी बनविण्यासाठी कोणते धोरण वापरायचे आहे, हे तुम्हाला कळले आहे. तुम्ही असे धोरण सांगू शकाल का, ज्यामुळे या खेळात नेहमी एकच खेळाडू सतत जिंकेल? (कोणता खेळाडू हे धोरण वापरून नेहमी जिंकू शकतो?)

Mathematical and pedagogical explanations

गणितीय आणि अध्यापनविषयक स्पष्टीकरणे

The activity helps the students engage in some fundamental practices of mathematics, such as observing patterns, making conjectures, verifying or refuting the conjectures, and so on. The novelty of the activity is in seeing how mathematical ideas emerge in the context of the game. The game begins with a simple task such as subtraction of two numbers. At the end of one or two games, the student begins to grasp that the process leads to a finite sequence of numbers. Moreover, one starts figuring out that the numbers that emerge in each game depend on the choice of the initial pair of numbers. After looking for patterns, the students will realize the connection between the HCF of the initial pair of numbers with the list of numbers obtained.

वरील कृती विद्यार्थ्यांना गणिताच्या मूलभूत प्रक्रिया जसे आकृतिबंध शोधणे, अनुमान बांधणे, अनुमानाची सत्यता तपासणे किंवा नाकारणे इत्यादींमध्ये गुंतवून ठेवतात. खेळाच्या माध्यमातून गणिताच्या कल्पना उलगडणे, हे या कृतीचे वैशिष्ट्य आहे. या खेळाची सुरुवात दोन संख्यांच्या वजाबाकीने होते. खेळ एकदा किंवा दोनदा खेळल्यानंतर विद्यार्थ्यांना त्यांच्या यादीत कोणत्या संख्या येऊ शकतात, हे लक्षात येऊ लागते. शिवाय एखाद्या विद्यार्थ्याच्या हेही लक्षात येते की प्रत्येक खेळात मिळणाऱ्या संख्या या खेळाच्या सुरुवातीला निवडलेल्या संख्यांच्या जोडीवर अवलंबून असतात. आकृतिबंध शोधायला सांगितल्यावर, सुरुवातीच्या संख्येच्या जोडीचा मसावि आणि यादीत लिहिलेल्या संख्या यांच्यात काही ना काही संबंध असतो, हेही त्यांच्या लक्षात येते.

To understand the mathematical significance of the students' responses, we consider below the different ways of thinking that students might exhibit and propose some conjectures that they might come up with. In the pedagogical discussion column, we provide explanations for some of the conjectures, and suggestions to lead the discussion.

विद्यार्थ्यांच्या चर्चेतून पुढे आलेल्या निरीक्षणांचे गणिती महत्त्व दाखविण्यासाठी, विद्यार्थी कसे वेगवेगळ्या प्रकारे विचार करू शकतात आणि त्यांची अनुमाने काय असू शकतात, हे पुढे दिलेले आहे. 'संभाव्य अध्ययनविषयक चर्चा (**Possible pedagogical discussion**)' या तक्त्यात काही अनुमानांचे स्पष्टीकरण सांगितले आहे. तसेच चर्चा सुरू करण्यासाठी सूचनाही केलेल्या आहेत.

Students' observations

विद्यार्थ्यांची निरीक्षणे

Possible pedagogical discussion

संभाव्य अध्ययनविषयक चर्चा

<p>The largest number in the sequence is the same as the largest number in the initial pair of numbers.</p> <p>यादीतील सर्वात मोठी संख्या आणि संख्येच्या जोडीतील मोठी संख्या, दोन्हीही सारख्याच आहेत.</p>	<p>I. Ask for the reason why the larger initial number remains the largest number in the list till the end.</p> <p>सुरुवातीच्या जोडीतील मोठी संख्या ही शेवटपर्यंत यादीतील सर्वात मोठी संख्या का राहते, हे विद्यार्थ्यांना विचारा.</p> <p>II. Explanation: As we are subtracting numbers in consecutive steps within the set of positive integers, the numbers obtained will always be smaller than the largest number in the initial pair of numbers.</p> <p>स्पष्टीकरण: दिलेल्या धन संख्यांची आपण फक्त वजाबाकी करत आहोत. त्यामुळे आलेले उत्तर सुरुवातीच्या संख्येपेक्षा नेहमीच लहान असते.</p>
<p>The list contains only the multiples of the smallest number in the final list.</p> <p>यादीतील सर्व संख्या या त्यातील सर्वात लहान संख्येच्या पटीत असतात.</p>	<p>III. Ask to verify with other examples in the table.</p> <p>तक्त्यातील इतर उदाहरणे तपासून पाहायला सांगा.</p> <p>IV. Ask whether they can come up with a counter-example.</p> <p>एखादे प्रति-उदाहरण सांगता येईल का, ते विचारा.</p> <p>V. Ask for the reason why this is the case.</p> <p>या निरीक्षणामागे त्याचे स्पष्टीकरण काय असू शकेल, ते विचारा.</p>
<p>In the initial pair of numbers, if one of the numbers is a multiple of the other, then the list contains only the multiples of the smaller initial number.</p> <p>संख्यांच्या सुरुवातीच्या जोडीत, जर एक संख्या दुसऱ्या संख्येची पट असेल, तर यादीतील सर्व संख्या जोडीतील लहान संख्येच्या पटीत असतात.</p> <p>E.g.: For the initial numbers, 7 and 35, the sequence obtained contains only multiples of 7.</p> <p>उदा., सुरुवातीच्या जोडीत 7 आणि 35 असल्यास, यादीमध्ये संख्या 7 च्या पटीत दिसून येतात.</p>	<p>VI. Ask to take a few more initial pairs of numbers, where one is a multiple of the other and verify that it works every time.</p> <p>विद्यार्थ्यांना, एक संख्या दुसऱ्या संख्येची पट होईल अशा काही सुरुवातीच्या संख्यांच्या जोड्या घ्यायला सांगा आणि प्रत्येक खेपेला असेच घडते का, ते पडताळून पाहायला सांगा.</p> <p>VII. Look for a counter-example — a set of two numbers which will refute the above conjecture. This is an opportunity to discuss whether not finding a counter-example amounts to a proof of the conjecture.</p> <p>प्रति-उदाहरण शोधा: या अनुमानाला नाकारतील, अशा जोड्या शोधायला सांगा. मांडलेल्या अनुमानाला प्रति-उदाहरण न मिळाल्यास ते सिद्ध झाल्याचे मानता येईल का, याची विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करण्यासाठी ही एक संधी आहे.</p>
<p>If the initial numbers are co-prime (i.e., 1 is the only common factor), then the list consists of all the numbers from 1 to the larger number in the initial pair of numbers.</p> <p>जर सुरुवातीच्या संख्या सह-मूळ (co-prime; त्यांचा सामाईक विभाजक फक्त 1 असतो) संख्या असल्यास यादीमध्ये 1 पासून सुरुवातीच्या जोडीतील मोठ्या संख्येपर्यंत सर्व संख्या असतात.</p>	<p>VIII. Ask to take a few more initial pairs of co-prime numbers and verify that it works every time.</p> <p>सुरुवातीच्या जोडीमध्ये सह-मूळ संख्या असतील अशा काही जोड्या घ्या आणि प्रत्येक वेळी असे घडते का, ते पहा.</p> <p>IX. Look for a counter-example — a set of two numbers which will refute the above conjecture. This is an opportunity to discuss whether not finding a counter-example amounts to a proof of the conjecture.</p>

	<p>प्रति-उदाहरण शोधा: या अनुमानाला नाकारतील, अशा जोड्या शोधायला सांगा. मांडलेल्या अनुमानाला प्रति-उदाहरण न मिळाल्यास ते सिद्ध झाल्याचे मानता येईल का, याची विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करण्यासाठी ही एक संधी आहे.</p>
<p>If the initial pair of numbers has a common factor, d, then the smallest number in the list is d.</p> <p>जर सुरुवातीच्या जोडीतील संख्यांचा सामाईक विभाजक d असेल, तर यादीतील सर्वात लहान संख्या d असते.</p>	<p>X. Note that students may not consider 1 as a common factor, and therefore while testing this conjecture they might not have co-prime numbers as the initial pair.</p> <p>लक्षात घ्या, 1 हा सामाईक विभाजक असेल हे विद्यार्थ्यांच्या लक्षात येईलच, असे नाही. म्हणून या अनुमानाची चाचणी घेताना विद्यार्थी सुरुवातीची जोडी म्हणून सह-मूळ संख्या घेणार नाहीत.</p> <p>XI. Ask to take a few more examples of a similar kind and verify that it works every time.</p> <p>याच प्रकारची आणखी काही उदाहरणे घ्या आणि प्रत्येक वेळी असेच घडते का, ते पहा.</p> <p>XII. Ask whether the two numbers in the pair have any other common factor. Ask them whether they want to modify the conjecture (Note that the conjecture in this particular form is not true. When we start with the initial numbers 12 and 16, 2 is a common factor of both numbers, but does not appear in the final list)</p> <p>जोडीतील दोन्ही संख्यांचा अजून कोणता सामाईक विभाजक आहे का, ते विचारा. अनुमानामध्ये काही बदल करायचा आहे का, ते त्यांना विचारा (लक्षात घ्या, हे अनुमान सत्य नाही. आपण सुरुवातीला 12 आणि 16 या संख्या घेतल्या, या दोन्ही संख्यांचा सामाईक विभाजक 2 हादेखील आहे. परंतु ही संख्या अंतिम यादीत दिसत नाही).</p> <p>XIII. Ask them if there is anything special about the common factor that is the smallest number in the list.</p> <p>विद्यार्थ्यांना, यादीतल्या सर्वात लहान संख्या ही जोडीतील संख्यांची सामाईक विभाजक असते का आणि त्या संख्येबद्दल काही खास सांगता येईल का, ते विचारा.</p> <p>XIV. Think about why the smallest number in the list is this particular factor.</p> <p>यादीतील सर्वात लहान संख्या ही एक खास सामाईक विभाजक का आहे, याचा विचार करा.</p>
<p>If the last three conjectures above have been articulated by the students, encourage them to come up with one conjecture that will include all these three conjectures.</p> <p>वरीलपैकी शेवटची तीन अनुमाने विद्यार्थ्यांनी दिली तर तीनही अनुमाने मिळून एकच अनुमान मांडण्यासाठी विद्यार्थ्यांना प्रोत्साहित करा.</p>	
The smallest number of the sequence is a	XV. Find out if this includes or contradicts any of the

<p>common factor of the initial two numbers.</p> <p>यादीतील सर्वात लहान संख्या ही सुरुवातीच्या दोन संख्यांची सामाईक विभाजक असते.</p>	<p>above conjectures.</p> <p>हे विधान वरच्या अनुमानांशी जुळते की वरच्या अनुमानांना चुकीचे ठरवते, ते पहा.</p> <p>XVI. Refine, verify, or refute the conjecture.</p> <p>अनुमान योग्य शब्दात मांडा, अनुमानाची सत्यता पडताळा किंवा अनुमान नाकारा.</p>
<p>The smallest number of the sequence is the HCF of the initial pair of numbers.</p> <p>यादीतील सर्वात लहान संख्या ही सुरुवातीच्या दोन संख्यांची मसावि असते.</p>	<p>XVII. Find out if this includes or contradicts any of the above conjectures.</p> <p>हे विधान वरच्या अनुमानांशी जुळते की वरच्या अनुमानांना चुकीचे ठरवते, ते पहा.</p>

Note: When students come up with observations and conjectures, these may not be articulated clearly enough. The teacher may need to rephrase, and ask clarifying questions to make the conjectures precise. There cannot be a standard instruction for this, and the teacher will have to think of ways of clarifying. Once a conjecture is formed, ask the students to verify, refute, or refine it. The next step is to think of a proof.

नोंद: जेव्हा विद्यार्थी त्यांची निरीक्षणे किंवा अनुमाने मांडतात तेव्हा बऱ्याचदा योग्य शब्दात मांडत नाहीत. त्यामुळे अनुमान स्पष्ट होण्यासाठी विद्यार्थ्यांना सूचक प्रश्न विचारत ते योग्य शब्दांमध्ये मांडणे गरजेचे असते. यासाठी कोणतीही निश्चित पद्धत नाही. अनुमान स्पष्ट शब्दांमध्ये मांडण्यासाठी शिक्षकांनाच अधिक प्रयत्न करावे लागतील. एकदा अनुमान स्पष्टपणे मांडले की विद्यार्थ्यांना त्याची सत्यता तपासायला किंवा ते खोडून काढायला सांगा. यापुढची पायरी ही अनुमान 'सिद्ध' कसे करता येईल, यावर विचार करण्याची असते.

Task 3: Looking for proofs of some conjectures

कृती 3: काही अनुमानांची सिद्धता पाहणे

Some students made these interesting observations after playing a few rounds of the game:

काही विद्यार्थ्यांनी हा खेळ काही वेळ खेळल्यानंतर रोचक किंवा आगळीवेगळी निरीक्षणे नोंदवली आहेत.

Observation 1: The smallest number in the final list is the HCF of the initial pair of numbers.

निरीक्षण 1: यादीतील सर्वात लहान संख्या ही सुरुवातीच्या जोडीतील संख्याची मसावि असते.

Observation 2: All and only the multiples of this smallest number up to the largest number appear in the list.

निरीक्षण 2: यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी आहेत. तसेच यादीमध्ये लहान संख्येपासून मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटीदेखील आहेत.

1. Can you figure out why this happens for every pair of numbers?

संख्यांच्या प्रत्येक जोडीसाठी असे का आढळते, यासंबंधी तुम्हाला काही सांगता येईल का?

Let us look at the two observations.

पुढील दोन निरीक्षणांबाबत चर्चा करू या.

I. Observation 1 says the following:

निरीक्षण 1 असे सांगते,

a. The smallest number in the list divides both the initial numbers.

अ) यादीतील सर्वात लहान संख्येने सुरुवातीच्या दोन्ही संख्यांना भाग देता येतो.

b. The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.

ब) सर्वात लहान संख्या ही फक्त सामाईक विभाजक नाही, तर सुरुवातीच्या दोन संख्यांचा मसावि असते.

II. Observation 2 implies the following:

निरीक्षण 2 असे सांगते,

a. All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list,

अ) यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी असतात.

b. All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.

ब) यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी आहेत. तसेच यादीमध्ये लहान संख्येपासून मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटीदेखील आहेत.

2. We need to prove or justify these observations. Can you think of the ways of doing this?

आपल्याला ही निरीक्षणे सिद्ध करायची आहेत. तुम्हाला काही मार्ग सुचतात, का ते लिहा.

The teacher could use the reasoning given below to guide the discussion with the students and to help them arrive at a proof.

शिक्षक विद्यार्थ्यांबरोबर चर्चा करण्यासाठी पुढे दिलेली कारणे वापरू शकतात आणि विधाने सिद्ध करण्यासाठी मदत करू शकतात.

Observation 1a: The smallest number in the list divides both the initial numbers.

निरीक्षण 1 अ: यादीतील सर्वात लहान संख्येने सुरुवातीच्या दोन्ही संख्यांना भाग देता येतो.

Proof for Observation 1a:

निरीक्षण 1 अ ची सिद्धता:

For positive numbers, whenever we subtract a number A from another (larger) number B, the result is less than B. Given that we start with two initial numbers, and form subsequent numbers by subtracting the smaller from the larger, all the numbers will be smaller than the largest number in the initial pair.

धन संख्यांसाठी, जेव्हा आपण एखादी संख्या 'A' दुसरी मोठी संख्या 'B' मधून वजा ($B-A$) करतो, तेव्हा मिळालेली संख्या 'B' पेक्षा लहान असते. आपण दोन संख्या घेऊन सुरुवात करतो आणि मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करीत आपल्याला संख्या मिळतात. त्यामुळे नंतरच्या सर्व संख्या सुरुवातीच्या जोडीतील मोठ्या संख्येपेक्षा लहान असतात.

Since we are not allowing negative numbers, the game *has* to stop at some stage. So there exists a smallest number in the list, which may be 1 or a number greater than 1.

या खेळात आपण ऋण संख्या विचारात घेत नसल्याने, एका टप्प्यावर खेळ आपोआपच थांबतो. त्यामुळे यादीमध्ये सर्वात लहान संख्या 1 असू शकते किंवा 1 पेक्षा मोठी असू शकते.

Let us call this the smallest number s . If we call the initial numbers as A and B , A being the larger of the two numbers, observation 1a claims that s divides A and s divides B .

यादीतील सर्वात लहान संख्या s मानू. निरीक्षण 1 अ) सांगते, s या संख्येने A आणि B या दोन्ही संख्यांना भाग देता येतो.

Let us first prove that s divides B .

प्रथम आपण s ने संख्या 'B' ला भाग जातो, हे दाखविण्यासाठी नकारात्मक सिद्धतेचा वापर करू.

Let assume s does not divide B .

आता गृहीत धरा, s या संख्येने 'B' ला भाग जात नाही, आणि B ला s ने भाग दिल्यास k बाकी मिळते.

Then $B = ns + k$ with $k < s$ ----- By applying the division algorithm with k as the remainder.

तर $B = ns + k$; $k < s$ भागाकाराची रीत वापरून आलेले समीकरण, यात k ही बाकी आहे.

But s belongs to the list. So $B - ns$ will also belong to the list --- we get this by subtracting s " n times" from B .

परंतु s ही संख्या यादीत आहे. म्हणून ' $B - ns$ ' पासून मिळालेली संख्या यादीत असेल..... s या संख्येला ' n ' वेळा गुणून आलेली संख्या B मधून वजा केल्यावर आपल्याला वरील समीकरण मिळते.

So $B - ns = k$ also belongs to the list, but $k < s$ and s is the smallest number in the list.

म्हणून $B - ns = k$ सुद्धा यादीत असली पाहिजे, परंतु $k < s$ आणि s ही यादीतील सर्वात लहान संख्या आहे.

That means our assumption that s does not divide B was wrong so, s divides B .

याचा अर्थ, s ने B ला भाग जात नाही असे आपले गृहीतक चुकीचे आहे. म्हणजेच s या संख्येने B ला भाग देता येतो.

Similarly, we can show that s divides A as well.

So s is a common factor of A and B .

याचप्रमाणे, s या संख्येने A ला भाग देता येतो, हेही आपल्याला दाखवता येईल. म्हणून s ही A आणि B यांचा सामाईक विभाजक आहे.

Observation 1b: The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.

निरीक्षण 1 ब: सर्वात लहान संख्या ही फक्त सामाईक विभाजक नाही, तर सुरुवातीच्या दोन संख्यांचा मसावि आहे.

Proof for Observation 1b:

निरीक्षण 1 ब ची सिद्धता:

Let us prove a statement before we proceed with the proof of Observation 1b.

सिद्ध करण्यापूर्वी आपण पुढील विधान सिद्ध करू.

Statement (I): A common factor of two numbers also divides their difference.

विधान (1): दोन संख्यांचा सामाईक विभाजक दोन संख्यांच्या वजाबाकीतून मिळालेल्या संख्येला विभागतो.

i. e. If q divides C and D and $C > D$, then q divides $C - D$.

म्हणजेच, जर q या संख्येने C आणि D या दोन्ही संख्यांना भाग देता येत असेल आणि $C > D$, तर C मधून D वजा केली असता $(C-D)$ या मिळालेल्या संख्येला q ने भाग जातो.

Proof of Statement (I): q divides C and D would mean,

विधानाची सिद्धता (1): q ने संख्या C आणि D यांना भाग जातो.

Let, and for some integers r and $t > 0$

याचा अर्थ, $C = rq$ आणि $D = tq$; r व t हे पूर्णांक आहेत आणि r व $t > 0$

So, $C - D = rq - tq = (r - t) \times q$

म्हणून $C - D = rq - tq = (r - t) \times q$

So, q divides $C - D$ and hence is a common factor of the difference between C and D .

अर्थात q ने $(C - D)$ ला भाग देता येतो किंवा वेगळ्या शब्दात C आणि D यांच्या फरकाचाही q हा सामाईक विभाजक आहे.

Coming back to observation 1b

आता आपण निरीक्षण 1 ब) कडे पुन्हा येऊ

Thus, if we start with two initial numbers and q is a common factor of both, it is also a common factor of their difference. This ensures that q is a common factor of all the three numbers in the list after the first step of the game. At every subsequent step, a pair of numbers is taken from the list and the difference written down as a new number. Thus if q is a common factor of the existing pair of numbers, it is also a factor of the new number. This ensures that if a number is a common factor of the initial numbers A and B , it is a factor of all the numbers in the list, including s . That is, any common factor of A and B , divides s .

अशा प्रकारे, आपण दोन संख्या घेऊन सुरुवात केली आणि या दोन्ही संख्यांचा सामाईक विभाजक q असेल, तर q ने त्यांच्या वजाबाकीतून आलेल्या संख्येला भाग देता येतो. यातून ही बाब सिद्ध होते की खेळाच्या पहिल्या पायरीनंतर यादीतील तिन्ही संख्यांचा सामाईक विभाजक q असतो. प्रत्येक पायरीवर, यादीतील कोणती तरी एक संख्यांची जोडी वापरली जाते आणि त्यांच्या वजाबाकीतून नवीन संख्या मिळते. जर q ही संख्या या संख्यांच्या जोडीचा सामाईक विभाजक असेल, तर q ही नवीन संख्येचा विभाजक असते. यावरून सुरुवातीच्या A आणि B या संख्यांना एखाद्या संख्येने भाग जात असेल, तर त्या संख्येने यादीतील, अगदी s सहीत, सर्व संख्यांना भाग जातो, याची पुष्टी मिळते. याचाच अर्थ, A आणि B यांचा सामाईक विभाजक s चाही विभाजक असतो.

So, if the HCF of the initial numbers A and B is d , then d divides s and $d \leq s$. However, we know that s also is a factor of A and B (Observation 1a). Hence $s \leq d$. Therefore, we have $s = d$.

म्हणून, सुरुवातीच्या A आणि B या संख्यांचा मसावि d असल्यास, तर d ने s ला भाग जातो. म्हणून $d \leq s$. मात्र, s ही A आणि B यांचादेखील सामाईक विभाजक आहे, हे आपल्याला माहीत आहे (निरीक्षण 1 अ). म्हणून $s \leq d$ याचाच अर्थ $s = d$.

Observation 2a: All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.

निरीक्षण 2 अ: यादीतील सर्व संख्या या सर्वात लहान संख्येच्या पटी आहेत.

Proof for Observation 2a: s belongs to the list, and A is a multiple of s .

निरीक्षण 2 अ ची सिद्धता: s ही संख्या यादीमध्ये आहे आणि A ही s ची पट आहे.

So, $A = fs$

म्हणून, $A = fs$

Now s and $A = fs$ are both already in the list.

आता, s आणि $A = fs$, दोन्हीही यादीत आहेत.

So, $fs - s = (f - 1)s$ is also in the list.

त्याचप्रमाणे $fs - s = (f - 1)s$ सुद्धा यादीत आहे.

Similarly, $(f - 1)s - s = (f - 2)s$ is also in the list.

त्याचप्रमाणे $(f-1)s - s = (f-2)s$ सुद्धा यादीत आहे.

Continuing like this we can see that,

$(f-1)s, (f-2)s, (f-3)s, \dots, 3s, 2s$ also belong to the list.

अशा रीतीने $(f-1)s, (f-2)s, (f-3)s, \dots, 3s, 2s$ सुद्धा यादीत असतील.

Observation 2b: All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list

निरीक्षण 2 ब: यादीतील मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटी दिसून येतात.

Proof for Observation 2b:

Using the same argument used in the proof of Observation 1a, we get that the smallest number, s divides any number in the list.

निरीक्षण 2 ब साठी सिद्धता: निरीक्षण 1a च्या सिद्धतेसाठी वापरलेले विधान वापरून आपल्याला s ही सर्वात लहान संख्या मिळते आणि ती यादीतील प्रत्येक संख्येला विभागते.

Relation to the Euclidean algorithm

युक्लिडच्या रीतीचा (कार्यावलीचा) संबंध

Imagine you change the rules of the game:

Instead of subtracting the smaller number from the largest, you could subtract a *multiple* of the smaller number from the larger. And then in the next step do the same with the multiple used and the number remaining after the subtraction. Then that is the Euclidean algorithm for you! So, can you see why the game and therefore the Euclidean algorithm works?

समजा, आपण खेळाचे नियम बदलले. मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करण्याऐवजी, आपण मोठ्या संख्येतून लहान संख्येच्या कोणतीही पट वजा करू शकतो आणि पुढच्या पायरीवर, जी पट वापरली आहे आणि वजाबाकीतून ज्या संख्या मिळाल्या आहेत, त्यावर तीच क्रिया करू शकतो. यालाच युक्लिडची कार्यावली म्हणतात. आता हा खेळ आणि युक्लिडची रीत (कार्यावली) कशी काम करते, ते आपल्याला समजले का?

Points to ponder

विचारात घेण्याच्या बाबी:

- 1) Do all pairs of numbers allow for a winning strategy? If not, what kinds of numbers will allow for a winning strategy?

संख्यांची सर्व जोडी वापरून जिंकता येते का? नसल्यास, संख्यांची कोणती जोडी वापरून जिंकता येईल?

- 2) What happens if you allow for the first three numbers to be random? Say, by making it a three-player game?

समजा हा खेळ तीन जणांनी मिळून खेळला आणि तीन संख्या घेऊन सुरुवात केली तर काय होईल?

Terms to discuss:

पुढील संज्ञांबाबत चर्चा करा:

Process of mathematics, conjecture, counter example, reporting a conjecture, etc.

गणिताची प्रक्रिया, अनुमान, प्रति-उदाहरण, अनुमाने यांसंबंधी माहिती देणे.

Suggested Readings:

अधिक वाचनाकरिता

- I. Euclid's Algorithm I: <https://nrich.maths.org/1357/index>
- II. Euclid's Algorithm II: <https://nrich.maths.org/1728>

- | III. Euclid's Algorithm III: <https://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml>

References

संदर्भ

- I. Euclid's Game: <https://www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml>
- II. The optimal strategy in Euclid's game:
<https://math.stackexchange.com/questions/754461/optimal-strategy-in-euclids-game>