Is your polygon the same as mine? तुमची आणि माझी बहुभुजाकृती एकसारखीच आहे का?

Introduction

प्रस्तावना

Have you ever wondered how you would describe a triangle that is in your mind to somebody over the phone? What do you really say? Do you mention the sides or the angles? And would that person get the exact same figure that you had in mind? Moreover, how can you do this by giving minimum information? Today we will try to answer these questions by investigating some examples, making observations, and verifying or refuting these observations.

तुम्ही एखाद्या व्यक्तीशी फोनवर बोलताना तुमच्या मनातील त्रिकोणाचे वर्णन कसे कराल, याचा विचार कधी केला आहे का? तुम्ही काय सांगाल? तुम्ही बाजूंबद्दल सांगाल की कोनांबद्दल सांगाल? आणि तुमच्या मनामध्ये जशी आकृती आहे, अगदी तशी आकृती ती व्यक्ती काढेल का? याउपर, कमीतकमी माहिती सांगून हे तुम्ही कसे करू शकता? आज आपण या सर्व प्रश्नांची उत्तरे काही उदाहरणे शोधून, निरीक्षणे करून आणि ती निरीक्षणे पडताळून किंवा त्यांचे निराकरण करून पाहणार आहोत.

Materials required

कृतीसाठी लागणारे साहित्यः

Blank sheets, pencils, erasers, Geometry boxes (Geometry compass, set-squares, protractor, and scale), scissors.

कोरे कागद, पेन्सिली, खोडरबर, कंपास पेटी (भूमिती कंपास, गुण्या (समकोनमापी), कोनमापक आणि मोजपट्टी), कात्री.

Task 1: Drawing your triangle

कृती 1: तुमच्या आवडीचा त्रिकोण काढणे

- Q. 1: Draw a triangle of your choice on the given blank sheet of paper. Measure the sides and the angles of the triangle, and label the vertices of the triangle.
- प्रश्न 1: तुम्हाला दिलेल्या कोऱ्या कागदावर तुमच्या आवडीचा त्रिकोण काढा. त्रिकोणाची लांबी आणि कोन मोजा आणि त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या.
- Q. 2: Now see the triangles drawn by your friends. Do you see anything interesting? What is it? प्रश्न 2: आता, तुमच्या मित्रमैत्रिणींनी काढलेले त्रिकोण पाहा. त्यात तुम्हाला काही वेगळे दिसले का? ते काय आहे?

Keep the paper on which you drew your triangle safely aside; we will be coming back to this triangle later in the activity.

तुम्ही ज्या कागदावर त्रिकोण काढलेला आहे, तो कागद नीट जपून ठेवा; नंतर या कृतीकडे आपण पुन्हा येणार आहोत.

Task 2: Constructing a triangle when only one measure is given

कृती 2: फक्त एक माप दिले असता त्रिकोणाची रचना करणे

Task 2a: Constructing a triangle when only one side is given कृती 2 अ: फक्त एक बाजू दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे

Draw a triangle on the given paper, such that one of its sides is 6 cm. Label the vertices of your triangle. Now study the triangle drawn by others.

दिलेल्या कोऱ्या कागदावर एक असा त्रिकोण काढा, ज्याच्या एका बाजूची लांबी 6 सेंमी. आहे. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना नावे द्या. आता, इतरांनी काढलेल्या त्रिकोणांचा अभ्यास करा.

Q. 1: Is your triangle the same as others? प्रश्न 1: तुम्ही काढलेला त्रिकोण आणि इतरांनी काढलेले त्रिकोण सारखेच आहेत का? ————————————————————————————————————			
Q. 2: How did you compare these two triangles? प्रश्न 2: तुम्ही या दोन त्रिकोणांची तुलना कशी केली?			
Q. 3: You and your friend, both were told that one side of the triangle is 6 cm. Did you both get exactly the same triangles? Why? प्रश्न 3: तुम्ही आणि तुमचे मित्रमैत्रीण, दोघांनाही असे त्रिकोण काढायला सांगितले होते, ज्यांची एक बाजू 6 सेंमी आहे. तुम्ही काढलेले त्रिकोण एकसारखेच आहेत का? का?			
—————————————————————————————————————			
Draw a triangle on the given paper where one of the angles measures 55°. Name your triangle. Now study the triangle drawn by others. दिलेल्या कोऱ्या कागदावर एक असा त्रिकोण काढा, ज्याच्या एका कोनाचे माप 55° आहे. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना ना द्या. आता इतरांनी काढलेला त्रिकोण पाहा.			
Q. 1: Is your triangle the same as others? प्रश्न 1: तुम्ही काढलेला त्रिकोण आणि इतरांनी काढलेले त्रिकोण सारखेच आहेत का?			

Q. 2: How did you compare these two triangles?

Q. 2: How did you compare these two triangles? प्रश्न 2: या दोन्ही त्रिकोणांमध्ये तुलना तुम्ही कशी केली?

Task 4: Constructing a triangle when three measures are given कृती 4: तीन मापे दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे

Your class is already divided into 3 groups. Now divide each group into 2 sub-groups. A1 & A2, B1 & B2 and C1 & C2.

तुमचा वर्ग अगोदरच ३ गटांमध्ये विभागलेला आहे. आता प्रत्येक गटाला अजून २ उप-गटांमध्ये विभागा.

Group A1: Draw a triangle XYZ such that XY = 4 cm, YZ = 6 cm, and XZ = 7 cm.

गट A1: त्रिकोण XYZ असा काढा की XY = 4 सेंमी., YZ = 6 सेंमी., आणि XZ = 7 सेंमी.

Group A2: Draw a triangle ABC such that, AB = 5 cm, BC = 6 cm, and ACB = 45°.

गट A2: त्रिकोण ABC असा काढा की AB = 5 सेंमी., BC = 6 सेंमी., आणि ACB = 45°.

Group B1: Draw a triangle IJK such that IJK = 40°, JKI = 65°, and IKJ = 75°.

गट B1: त्रिकोण IJK असा काढा की IJK = 40° JKI = 65°, आणि IKJ = 75°.

Group B2: Draw a triangle STU such that UST = 50°, ST = 3 cm, and STU = 65°.

गट B2: त्रिकोण STU असा काढा की UST = 50° , ST = 3 सेंमी. आणि STU = 65° .

Group C1: Draw a triangle EFG such that EF = 7 cm, FG = 9 cm, and GEF = 90°.

गट C1: त्रिकोण EFG असा काढा की EF = 7 सेंमी., FG = 9 सेंमी., आणि GEF = 90°.

Group C2: Draw a triangle PQR such that PQ = 5 cm, PQR = 50°, and QR = 4 cm.

गट C2: त्रिकोण PQR असा काढा की PQ = 5 सेंमी., PQR = 50°, आणि QR = 4 सेंमी.

Now study the triangle drawn by your group members.

आता, तुमच्या गटातील इतरांनी काढलेल्या त्रिकोणांचा अभ्यास करा.

Q. 1: Are all triangles in your group the same?

प्रश्न 1: तुमच्या गटात काढलेले सर्वच त्रिकोण सारखेच आहेत का?

Q. 2: How did you compare these two triangles?

प्रश्न 2: तुम्ही या दोन त्रिकोणांची तुलना कशी केली?

Task 5: Minimum conditions for the construction of a unique triangle कृती 5: एकमेव त्रिकोणाची रचना करण्यासाठी किमान अटी

Q. 1: If you want others to construct exactly the same triangle like the one you drew in Task 1, what minimum information will you have to provide?

प्रश्न 1: कृती 1 मध्ये तुम्ही जो त्रिकोण काढला आहे, अगदी तसाच त्रिकोण इतरांनी काढावा, असे तुम्हाला वाटत असेल, तर कोणती कमीतकमी माहिती तुम्हाला द्यावी लागेल?

Vigyan Pratibha Learning Unit	Is your polygon the same as mine?
Q. 2: Are there other sets of minimum information that could be proventiangle? Try and mention all such different sets of information the प्रश्न 2: हुबेहूब त्रिकोण काढण्यासाठी किमान कोणती माहिती देता येईल? या उल्लेख करण्याचा प्रयत्न करा.	nat would work.
—————————————————————————————————————	
Q. 1a: Now that you all know how to make a congruent triangle, congruent quadrilateral. So if the minimum conditions for mak what should be enough for a quadrilateral? प्रश्न 1 अ: आता तुम्हाला एकरूप त्रिकोण कसे काढायचे, ते माहीत झाले काढतात ते पाहू या. जर एकरूप त्रिकोण काढण्यासाठी कमीत कमी व चौकोन काढण्यासाठी किती अटी लागतील?	sing a congruent triangle are three, आहे. चला तर, एकरूप चौकोन कसे
Q. 1b: Now, given that all the sides of a quadrilateral are 3 cm, think a that you can draw. Draw the figures on the given blank sheet. प्रश्न १ बः आता, दिलेल्या चौकोनाच्या सर्व बाजूंची लांबी ३ सेंमी. असेल, तर क् काढू शकता, याचा विचार करा. दिलेल्या कोऱ्या कागदावर या आकृत्या Q. 2: Did you or your friend get different quadrilaterals for Q. 1b? प्रश्न २: प्रश्न १ ब मध्ये, तुम्हाला किंवा तुमच्या मित्रमैत्रिणींना वेगवेगळे चौकोन मि	नुम्ही वेगवेगळ्या प्रकारचे किती चौकोन I काढा.
Q. 3: So if all four sides are given, is it always possible to get difference know? प्रश्न 3: जर केवळ चार बाजू दिलेल्या असतील, तर तुम्हाला वेगवेगळे चौकोन कसे लक्षात आले?	erent quadrilaterals? How do you

information that you can send him/her, such that he/she gets the exact same quadrilateral as the one you had in your mind. What information will you send?
प्रश्न ४: अशी कल्पना करा की तुम्हाला एखाद्या चौकोनाबाबत इतरांना कळवायचे आहे. आता तुमच्या मनात जो चौकोन
आहे, अगदी तसाच चौकोन तुमच्या मित्रमैत्रीणीने काढावा यासाठी तुम्ही कमीतकमी कोणती माहिती पाठवाल,
याचा विचार करा.
Check whether what you suggested as the minimum information really works. Try drawing different quadrilaterals for the information you said you would give your friend in the question above.
तुम्ही सुचवलेली कमीतकमी माहिती खरोखरच काम करते का, हे तपासा. वरील प्रश्नात, तुम्ही तुमच्या मित्रमैत्रीणीला
जी माहिती देणार आहात, त्यावर आधारीत वेगवेगळे चौकोन काढण्याचा प्रयत्न करा.
Q. 5: Think about why this set of information will lead to congruent or non-congruent quadrilaterals.
प्रश्न 5: तुमच्या माहितीमुळे एकरूप किंवा एकरूप-नसलेले चौकोन का मिळतील, याचा विचार करा.
Q. 6: List the conditions that worked for constructing a unique quadrilateral.
प्रश्न 6: एकमेव चौकोन काढण्यासाठीच उपयोगी ठरतील, अशा अटींची यादी करा.
Task 7: Some special triangles and quadrilaterals
कृती ७: काही खास त्रिकोण आणि चौकोन
We have found out the minimum information needed to draw congruent triangles and congruent quadrilaterals, but let us look at some special triangles and quadrilaterals and find out the minimum information we need to construct these.
एकरूप त्रिकोण आणि एकरूप चौकोन काढण्यासाठी कोणती कमीतकमी माहिती आवश्यक असते, ते आपण पाहिले.
परंतु आता आपण काही खास त्रिकोण आणि चौकोन पाहू आणि त्यांची रचना करण्यासाठी कोणती कमीतकमी माहिती
आवश्यक असते, ते पाहू.
Q. 1: Which minimum conditions do you need to construct congruent equilateral triangles?
प्रश्न 1: एकरूप समभूज त्रिकोण काढण्यासाठी तुम्हाला कोणत्या कमीतकमी अटींची गरज असते?

Q. 4: Imagine that you have to write to your friend about a quadrilateral. Now think of the minimum

Q. 2: Which minimum conditions do you need to construct congruent squares? प्रश्न 2: एकरूप चौरस काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?
Q. 3: Which minimum conditions do you need to construct congruent rectangles? प्रश्न 3: एकरूप आयत काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?
Q. 4: Which minimum conditions do you need to construct congruent rhombuses? प्रश्न 4: एकरूप चौकोन काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?
Q. 5: Which minimum conditions do you need to construct congruent parallelograms? प्रश्न 5: एकरूप समांतरभुज चौकोन काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?
Q6. Which minimum conditions do you need to construct congruent trapeziums? प्रश्न 6. एकरूप समलंब चौकोन काढण्यासाठी तुम्हाला कमीतकमी कोणती माहिती लागेल?
Task 8: Constructing a pentagon कृती 8: पंचकोन काढणे Q. 1: Now that you all know what conditions give constructions of congruent triangles or congruen quadrilaterals, let us figure out how to construct congruent pentagons. So, if the minimum conditions for making congruent triangles are three, and that for congruent quadrilaterals are five what do you think is the number of minimum conditions needed to construct congruen pentagons? प्रश्न 1: आता तुम्हाला एकरूप त्रिकोण किंवा एकरूप चौकोन कोणकोणत्या अटींनुसार काढता येतो, हे समजले आहे
चला तर, आता पंचकोन काढू या. जर एकरूप त्रिकोण काढण्यासाठी कमीतकमी अटींची संख्या तीन असेल आणि एकरूप चौकोन काढण्यासाठी कमीतकमी अटींची संख्या पाच असेल, तर एकरूप पंचकोन काढण्यासार्ठ कमीतकमी अटींची संख्या किती असेल, असे तुम्हाला वाटते?

Q. 2: Imagine that you have to write to your friend about a pentagon. Now think of the minimum information that you can send him/her, such that he/she gets the exact same pentagon as the one you had in your mind. What information you will send?

प्रश्न 2: अशी कल्पना करा की मित्रमैत्रिणींना पंचकोनाबाबत सांगायचे आहे. तुमच्या मनात जो पंचकोन आहे अगदी तसाच पंचकोन त्यांना काढता यावा, यासाठी तुम्ही कोणकोणती माहिती पाठवाल?

Check whether what you suggested as the minimum information really works. Try drawing different pentagons for the information you said you would give your friend in the question above.

तुम्ही सुचवलेली माहिती प्रत्यक्षात उपयोगी पडते का, ते तपासा. वरील प्रश्नात तुम्ही जी माहिती सांगणार आहात, त्यावर आधारित वेगवेगळे पंचकोन काढण्याचे प्रयत्न करा.

Q. 3: Think about why this set of information will lead to congruent or non-congruent pentagons.

प्रश्न 3: या माहितीनुसार एकरूप किंवा एकरूप नसलेले पंचकोन का तयार होऊ शकतात, यावर विचार करा.

Q. 4: List the conditions that worked for making a unique pentagon.

प्रश्न 4: एकमेव पंचकोन काढण्यासाठी कोणकोणत्या अटी लागतील, याची यादी करा.

Task 9: Finding the number of conditions to construct a congruent polygon कृती 9: एकरूप बहुभूजाकृती काढण्यासाठी लागणाच्या अटींची किमान संख्या शोधणे

Now that you know the minimum conditions needed for constructing congruent triangles, congruent quadrilaterals and congruent pentagons, let us explore how many conditions are needed for constructing congruent hexagons, or congruent heptagons.

आता तुम्हाला एकरूप त्रिकोण, एकरूप चौकोन आणि एकरूप पंचकोन काढण्यासाठी आवश्यक असलेल्या अटींची संख्या माहीत झाली आहे. चला तर, आता एकरूप षटकोन आणि एकरूप सप्तकोन काढण्यासाठी किती अटी लागतात, ते पाहू या.

Make some guesses, and make constructions on the given sheets of paper. Record your guesses in table 1 below.

काही अंदाज करा आणि दिलेल्या कागदावर रचना करा. तुमच्या अंदाजाबाबत तक्ता १ मध्ये माहिती लिहा.

Number of sides in the polygon बहुभुजाकृतीतील बाजूंची संख्या	Name of the polygon बहुभुजाकृतीचे नाव	Minimum conditions required for constructing a congruent polygon एकरूप बहुभुजाकृती काढण्यासाठी आवश्यक असलेल्या अटींची संख्या
3	Triangle त्रिकोण	3
4	Quadrilateral चौकोन	
5	Pentagon पंचकोन	
6	Hexagon षटकोन	
7	Heptagon सप्तकोन	
8	Octagon अष्टकोन	

Table 1: Minimum conditions required for constructing a congruent polygon तक्ता 1 एकरूप बहुभुजाकृती काढण्यासाठी लागणाच्या कमीतकमी अटी

Proving our Conjectures आपले अनुमान सिद्ध करणे

Let us find out how we can prove which guesses are right and which ones are wrong. चला, आपले कोणते अनुमान बरोबर आहेत आणि कोणते चुकीचे आहेत, ते आपण सिद्ध करू शकतो का ते पाहू या.

Draw a quadrilateral.

एक चौकोन काढा.

Draw a diagonal inside the quadrilateral so that it splits into two triangles. See *Figure 1*. या चौकोनात असा एक कर्ण काढा की चौकोनाचे दोन त्रिकोण बनतील. *आकृती 1* पाहा.

(Here we have drawn two different types of quadrilaterals). (येथे, आपण दोन वेगवेगळ्या प्रकारचे चौकोन काढले आहेत).

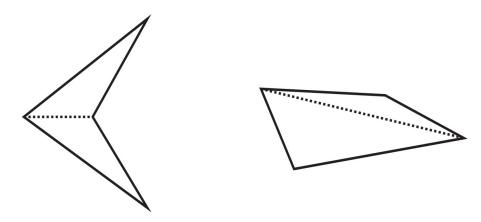


Figure 1: Triangulation of quadrilaterals आकृती १: चौकोनांचे त्रिकोणीकरण

We see that every quadrilateral can be split into two triangles in this way. We know that for constructing a unique triangle we need three minimum conditions.

आपण पाहिले की, प्रत्येक चौकोन या प्रकारे दोन त्रिकोणांमध्ये विभागता येतो. आपल्याला हेदेखील माहीत आहे की एकमेव असा त्रिकोण काढण्यासाठी आपल्याला कमीतकमी तीन अटी आवश्यक असतात.

So in this case, to construct the first triangle we needed three minimum conditions. For the next triangle, we need three more, but as one side is common, we need only two other conditions to construct a triangle congruent to the second triangle. These can be, for example, 1) a side and 2) the angle that this side makes with the diagonal of the quadrilateral. Or alternatively, one can also give two angles.

म्हणून पहिला त्रिकोण काढण्यासाठी आपल्याला तीन अटी आवश्यक आहेत. पुढच्या त्रिकोणासाठी आपल्याला अजून तीन अटी लागतील. परंतु त्यांच्यातील एक बाजू सामाईक असल्याने दुसऱ्या त्रिकोणाचा एकरूप त्रिकोण काढण्यास आपल्याला फक्त दोन इतर अटी लागतील. या अटी म्हणजे 1) एक बाजू आणि 2) या बाजूने चौकोनाच्या कर्णाशी केलेला कोन. किंवा या अटींऐवजी, आपण कोणतेही दोन कोन देऊ शकतो.

Another way of thinking about this is, once we fix the first triangle, three vertices of the quadrilateral are fixed. So to fix the remaining vertex, two conditions (as in the examples above) are sufficient. Hence these five conditions are the minimum pieces of information needed to construct a quadrilateral.

याचा असाही विचार करता येईल, तो म्हणजे एकदा आपण पिहला त्रिकोण निश्चित केला की त्या चौकोनाचे तीन शिरोबिंदू निश्चित होतात. म्हणजे उरलेला शिरोबिंदू निश्चित करण्यासाठी, दोन अटी (वरील उदाहरणात सांगितल्याप्रमाणे) पुरेशा आहेत. म्हणून या किमान पाच अटी एखाद्या चौकोनाची रचना करण्यासाठी पुरेशा असतात.

This also reconfirms our understanding of the minimum conditions needed to construct a unique quadrilateral.

म्हणून चौकोनाच्या रचनेसाठी लागणाऱ्या कमीतकमी अटींबद्दलचा आपला अनूमान बरोबर ठरतो.

What will happen if we do the same for a pentagon? आपण हीच पद्धत पंचकोनासाठी वापरली तर काय होईल?

Let us draw a pentagon and see how many triangles the pentagon can be split into by drawing a minimum number of diagonals. We see from figure 2 that by drawing two diagonals, the pentagon can be split into three triangles.

चला एक पंचकोन काढू आणि हा पंचकोन कमीत कमी कर्ण काढून किती त्रिकोणात विभागता येईल, ते पाहू. आकृती 2

पाहा. या आकृतीतून लक्षात येईल की 2 कर्ण काढले असता, पंचकोन 3 त्रिकोणात विभागता येतो.

For the first triangle we need three conditions, for the second triangle we need another three, but then one side overlaps so we need only two. Similarly, for the third triangle, we need two more conditions. पहिल्या त्रिकोणासाठी आपल्याला तीन अटी लागतील, दुसऱ्या त्रिकोणासाठी आपल्याला अजून तीन अटी लागतील, परंतु एक बाजू सामाईक असल्याने आपल्याला फक्त दोन अटी लागतील. तसेच तिसऱ्या त्रिकोणासाठी आपल्याला अजून दोन अटी लागतील.

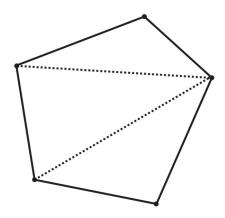


Figure 2: Triangulation of pentagon आकृती 2 पंचकोनाचे त्रिकोणीकरण

So, you can see that whenever you add a triangle, you add two conditions. So, the minimum conditions necessary for constructing a unique pentagon are seven (3 + 2 + 2).

थोडक्यात, तुमच्या लक्षात आले असेल की प्रत्येक वेळी आपण एक त्रिकोण जोडतो, तेव्हा दोन अटी वाढतात. म्हणून एकमेव असा पंचकोन काढण्यासाठी कमीतकमी सात (3 + 2 + 2) अटी आवश्यक असतील.

Let us try to figure this out for hexagons, heptagons, and octagons.

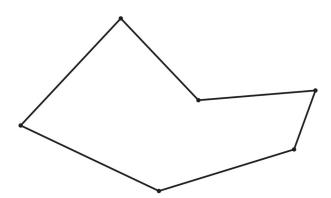


Figure 3: Triangulate the hexagon आकृती 3 षटकोनाचे त्रिकोणीकरण करा

चला तर आता षटकोन, सप्तकोन आणि अष्टकोन यांच्यासाठी किमान अटी किती लागतील, ते पाहू.

1. How many triangles can a hexagon be split into? (Remember that the number of diagonals drawn must be a minimum.)

एखादा षटकोन किती त्रिकोणांत विभागता येईल? (लक्षात ठेवा, काढलेल्या कर्णांची संख्या कमीतकमी असायला हवी)______

2. What is the minimum number of conditions needed to construct unique hexagons? Why? एकमेव असा षटकोन काढण्यासाठी किमान किती अटी आवश्यक असतात? का?

3. How many triangles can a heptagon be split into? Why? एखादा सप्तकोन किती त्रिकोणांत विभागता येऊ शकतो? का?

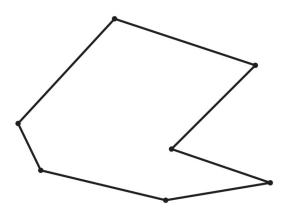


Figure 4: Triangulate the heptagon आकृती 4 सप्तकोनाचे त्रिकोणीकरण करा

4. What is the minimum number of conditions needed to construct unique heptagon? Why?

एकमेव असा सप्तकोन काढण्यासाठी किमान किती अटी आवश्यक असतात? का?

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE

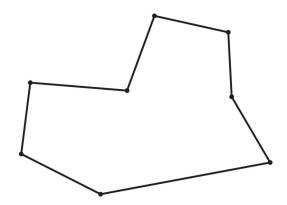


Figure 5: Triangulate the octagon आकृती 5 अष्टकोनाचे त्रिकोणीकरण करा

5.	How many triangles can an octagon be split into? Why?
	एखादा अष्टकोन किती त्रिकोणांत विभागता येऊ शकतो? का?

References

संदर्भ

- Plaksin, O., & Patkin, D. (2016). Exploring the minimum conditions for congruency of polygons.
 Learning and Teaching Mathematics, 2016(2), 42-46. http://www.amesa.org.za/amesal_n21_a12.pdf
- Page, John D. Congruent polygons. From Math Open Reference. https://www.mathopenref.com/ congruentpolygons.html